Ist (*) inhomogen, so heißt die pDgl

$$G(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \ldots,$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^{k_n} \ldots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}) = 0 \qquad \text{(H)}$$

die zu (*) gehörige homogene lineare pDgl.

Kurzschreibweise: $G(\ldots) =: g(x, u)$.

Dann lautet (H) kurz:

$$g(x, u) = 0. \qquad \text{(H)}$$

Weil die Ableitungen linear in u sind und G linear in u und den Ableitungen von u ist, gilt dann:

$$g(x, u_1 + u_2) = g(x, u_1) + g(x, u_2)$$

$$g(x, \lambda \cdot u) = \lambda \cdot g(x, u)$$

oder kurz

$$g(x, c_1 \cdot u_1 + c_2 \cdot u_2) = c_1 \cdot g(x, u_1) + c_2 \cdot g(x, u_2)$$

Daraus folgt:

Satz: (Superpositionsprinzip für lineare pDgln) Sind u_1, u_2 Lösungen (mit gemeinsamem Definitionsbereich) einer homogenen linearen pDgl (H), so sind auch $c_1 u_1 + c_2 u_2$ Lösungen von (H), wobei c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

Einige pDgln für zeitabhängige reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

12.2.6 pDgl einer schwingenden Saite

Eine Saite sei längs der x-Achse in der (x, u)-Ebene gespannt zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(L, 0)$ (mit $L > 0$).

Die Saite werde ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ beschrieben durch eine Funktion $u(x, 0) = f(x)$.

Welche Auslenkung $u(x,t)$ erhält man zur Zeit t für den Punkt mit der Ruhelage $(x,u) = (x,0)$?

Vereinfachende Annahmen:

1. Die Saite ist homogen (z.B. in Bezug auf die Masse).

2. Die Saite ist vollkommen elastisch.

3. Der Widerstand gegen die Biegung wird vernachlässigt.

4. Die Spannung der Saite ist so stark, dass die Schwerkraft vernachlässigt werden kann.

5. Jeder Punkt der Saite bewegt sich nur in u-Richtung.

6. Die Auslenkung in u-Richtung ist so gering, dass die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ auf $[0, L]$ überall einen kleinen Absolutwert hat.

Die Spannung T ist in jedem Punkt tangential zur Saite.
Auf ein kurzes Stück zwischen $P := (x_1, u(x_1))$ und $Q := (x_2, u(x_2))$ der Saite wirkt eine Kraft T_1 im Punkt P und T_2 im Punkt Q.
Sie hat jeweils einen Horizontalanteil

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta =: T \qquad \text{(wegen } \mathbf{5}.\text{)}$$

mit $\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_1}$ und $\tan\beta = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_2}$.

Die Vertikalanteile $T_1 \sin\alpha$ und $T_2 \sin\beta$ geben zusammen die rücktreibende Kraft in u-Richtung, also

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha$$

(eventuell bis aufs Vorzeichen?).

(Das Stück PQ sei so kurz, dass kein Extremum dazwischen liegt.
Daher das Minuszeichen.)

Da Kraft = Masse mal Beschleunigung ist, gilt also

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dabei ist ρ die Masse pro Längeneinheit und Δx eine gute Näherung für die Länge des Saitenstücks PQ.
Division durch $T = T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta$ liefert:

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

oder

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Nun ist $\tan\beta = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_2}$ und $\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_1}$ und

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} [\frac{\partial u}{\partial x}|_{x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_1}] = \frac{\rho}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Damit erhalten wir die **eindimensionale Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

mit $c^2 := \frac{\rho}{T}$. (ρ und T sind positiv.)
Sie ist linear, homogen und von zweiter Ordnung.