

Höhere Mathematik 3 für Maschinenwesen und Chemie-Ingenieurwesen

WS 2009/10

Technische Universität München

Vorlesung: Johann Hartl

Übungen: Carl-Friedrich Kreiner

12.2 Partielle Differentialgleichungen

Eine **partielle Differentialgleichung** (**pDgl**) ist eine Gleichung, in der vorkommen können:

- n unabhängige Veränderliche x_1, x_2, \dots, x_n
- bekannte Funktionen von x_1, x_2, \dots, x_n
- eine unbekannte (gesuchte) Funktion u von den x_1, x_2, \dots, x_n

- partielle Ableitungen

$$u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n},$$

$$u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_1x_3}, \dots, u_{x_1x_n},$$

$u_{x_2x_1}, u_{x_2x_2}, u_{x_2x_3}, \dots, u_{x_2x_n},$

$u_{x_3x_1}, u_{x_3x_2}, u_{x_3x_3}, \dots, u_{x_{n-1}x_n}, u_{x_nx_n}, \dots$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^{k_n} \dots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}$$

von u

Dabei ist $m = \sum_{j=1}^n k_j$ und heißt die **Ordnung** der pDgl.

12.2.1 Allgemeine Gestalt einer pDgl

$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_2}, \dots,$

$$\left. \frac{\partial^m u}{\partial x_n^{k_n} \dots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}} \right) = 0 \quad (\text{pD})$$

Eine Funktion u , definiert auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$, nennen **wir** eine **Lösung** von (pD), wenn gilt:

- u besitzt auf G alle partiellen Ableitungen bis zur m -ten Ordnung und diese sind stetig.
- setzt man u und die Ableitungen von u in (pD) ein, so ist die Gleichung $\forall (x_1, \dots, x_n) \in G$ erfüllt.

Bem.: Manchmal setzen wir für die Lösung weniger voraus.

12.2.2 Geometrische Interpretation einer pDgl für $n = 2$:

Ist $n = 2$, also $G \subseteq \mathbb{R}^2$, so ist der Graph von u eine Fläche in \mathbb{R}^3 , eine **Lösungsfläche** oder **Integralfläche** von (pD).

Die part. Ableitungen von u lassen geometrische Deutungen zu:
(Wir schreiben $x_1 =: x$, $x_2 =: y$, $x_3 =: z$.)

$u_x(x_0, y_0)$ ist Steigung des Schnitts von $\text{Graph}(u)$ mit einer Ebene parallel zur xz -Ebene durch den Punkt $(x_0, y_0, 0)$

$u_y(x_0, y_0)$ ist Steigung des Schnitts von $\text{Graph}(u)$ mit einer Ebene parallel zur yz -Ebene durch den Punkt $(x_0, y_0, 0)$

12.2.3 Einfache Beispiele

Partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0$$

Bsp.:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$$

Dann ist u konstant in x_1 —

in jedem x_1 -Intervall, das für konstante x_2, \dots, x_n zum betrachteten Bereich gehört.

Für $n = 2$:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (*).$$

In jedem Rechteck

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, p \leq y \leq q\}$$

mit $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p < q$ ist u eine beliebige C^1 -Funktion von y alleine

—

wenn das Rechteck ganz zum Definitionsbereich von u gehört.

In jeder konvexen Teilmenge der xy -Ebene ist u eine beliebige C^1 -Funktion von y alleine —
wenn die konvexe Teilmenge ganz zum Definitionsbereich von u gehört.

Der Graph von u besteht aus Strecken, Halbgeraden oder Geraden parallel zur x -Achse.

$$u(x, y) = d(y)$$

ist die allgemeine Lösung von (*) auf jedem Gebiet der xy -Ebene, das aus allen Geraden parallel zur y -Achse eine Strecke, eine Halbgerade oder eine Gerade ausschneidet.

Bsp.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - c = 0 \quad (*)$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$ und mit $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$u(x, y) = cx + \left\{ \begin{array}{l} d_1(y) \\ d_2(y) \\ d_3(y) \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} y < 0 \\ y \geq 0, x < 0 \\ y \geq 0, x > 0 \end{array} \right\},$$

wobei d_1 und d_2 längs $y = 0, x < 0$ und

d_1 und d_3 längs $y = 0, x > 0$ einen differenzierbaren Übergang haben müssen.

Bem.: Der Def.-Bereich D von F beeinflusst die Gestalt der Lösung.

Das haben wir jetzt verstanden und betrachten im folgenden in der nächsten Zeit nur Bereiche der xy -Ebene, die keine Probleme machen,

z.B. konvexe Bereiche oder Rechtecke mit achsenparallelen Seiten.

Bsp.:

$$u_x = f(x, y)$$

Allgemeine Lösung:

$$u(x, y) = \int f(x, y) dx + c(y)$$

Dabei ist $c(y)$ eine beliebige C^1 -Funktion und $\int f(x, y) dx$ eine beliebige Funktion von (x, y) , deren partielle Ableitung nach x gleich $f(x, y)$ ist.

Man kann für eine spezielle Lösung zum Beispiel vorschreiben:

Den Wert von $u(x, y)$ für $x = x_0$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x f(\xi, y) d\xi + c(y)$$

Damit ist $u(x_0, y) = c(y)$.

Man kann auch vorschreiben:

Den Wert von $u(x, y)$ längs einer Kurve $x = x(y)$:

$$u(x, y) = \int_{x(y)}^x f(\xi, y) d\xi + c(y)$$

Damit ist $u(x(y), y) = c(y)$.

Bsp.:

$$u_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow u_x = c(y) \Rightarrow u(x, y) = xc(y) + d(y)$$

Bsp.:

$$u_{xy} = 0$$

$\Rightarrow u_x = c(x) \Rightarrow u(x, y) = \int c(x)dx + g(y)$ oder kürzer:

$$u(x, y) = f(x) + g(y)$$

12.2.4 Ein erstes Lösungsverfahren: lineare Variablensubstitution

Die lineare pDgl 1. O. mit konst. Koeffizienten

$$au_x + bu_y = f(x, y)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$ transformiert man mit der **Variablensubstitution**

$$x = \frac{1}{2b}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{2a}(\xi - \eta)$$

$$\xi = bx + ay, \quad \eta = bx - ay$$

$$U(\xi, \eta) := u\left(\frac{1}{2b}(\xi + \eta), \frac{1}{2a}(\xi - \eta)\right) = u(x, y)$$

Rechte Seite:

$$F(\xi, \eta) = f(x, y) = f\left(\frac{1}{2b}(\xi + \eta), \frac{1}{2a}(\xi - \eta)\right)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= au_x + bu_y = \\ &= a(U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + b(U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y) = \\ &= a(U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + b(U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y) = \\ &= a(U_\xi b + U_\eta b) + b(U_\xi a + U_\eta (-a)) = 2abU_\xi \end{aligned}$$

Damit ist

$$U_\xi = \frac{1}{2ab} F(\xi, \eta)$$

Das ist eine pDgl für U mit der Lösung:

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{2ab} \int F(\xi, \eta) d\xi + G(\eta).$$

Rücksubstitution:

$$u(x, y) = \frac{1}{2ab} \int_{bx_0+ay_0}^{bx+ay} F(\xi, bx - ay) d\xi + G(bx - ay).$$

Spezialfall: $f(x, y) = 0 \forall (x, y) \Rightarrow$

$F(\xi, \eta) = 0 \forall (\xi, \eta) \Rightarrow u(x, y) = G(bx - ay)$, wobei G eine beliebige reelle diffbare Fkt einer reellen Variablen ist.

Bem.: Variablensubstitutionen brauchen nicht linear zu sein; sie können vielfältige Gestalt haben.

12.2.5 Das Superpositionsprinzip für lineare pDgln

Eine pDgl

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, \frac{\partial^{m_u}}{\partial x_n^{k_n} \dots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}) = 0 \quad (\text{pD})$$

für eine Funktion u heißt **linear**, wenn F linear ist in u und in den auftretenden Ableitungen von u .

Ist (pD) linear, so lässt sich (pD) schreiben in der Gestalt

$$G(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, \frac{\partial^{m_u}}{\partial x_n^{k_n} \dots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}) = f(x_1, \dots, x_n), \quad (*)$$

wobei G linear ist in u und in den auftretenden Ableitungen von u . Funktionen von x_1, x_2, \dots, x_n treten auf in den Koeffizienten und auf der rechten Seite.

Ist $f = 0$, so heißt (*) **homogen**, sonst **inhomogen**.