$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right) \quad (6)$$

$$(i = 1, \ldots, n-1; \quad j = 0, \ldots, m-1)$$

Kennt man u_{ij} für festes j und alle i, so kann man $u_{i,j+1}$ berechnen für $i = 1, \ldots, n-1$. Man setzt $u_{0,j+1} = u_{n,j+1} = 0$ (wegen (2)),

Man gibt u_{i0} vor für $i = 0, \ldots, n$ (wegen (3)) und man kann damit nach (6) schrittweise berechnen die u_{ij} für $j = 1, 2, \ldots, m$

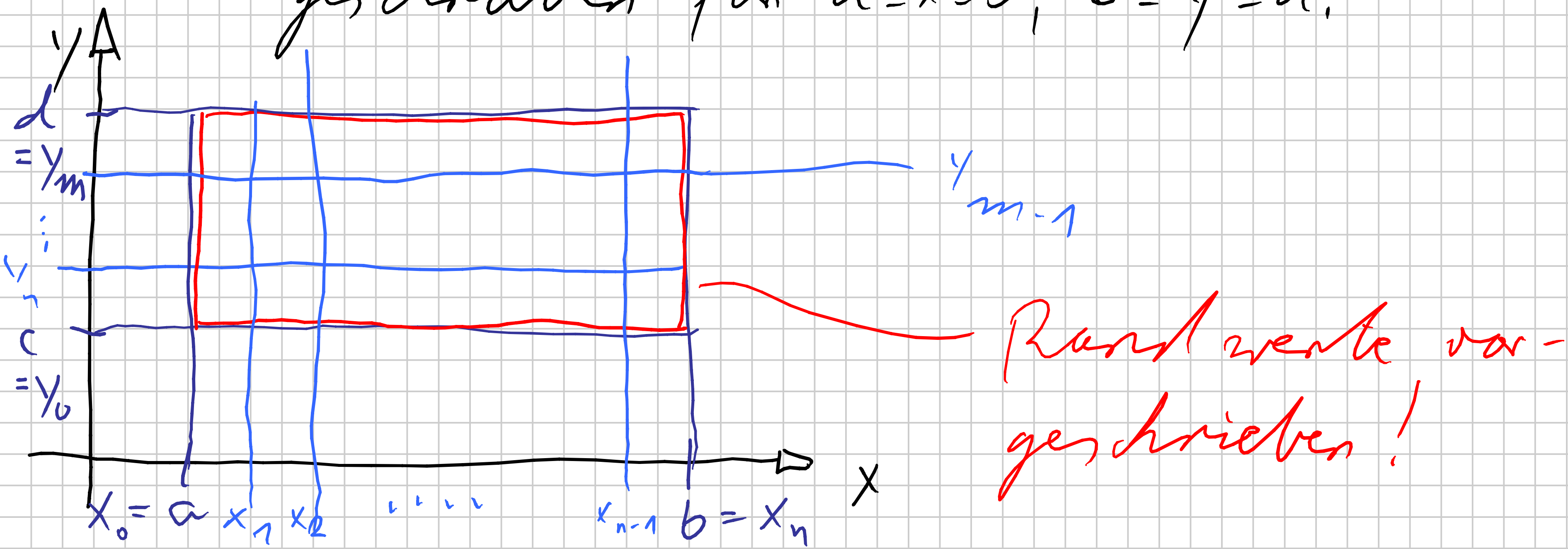
und für $i = 1, 2, \ldots, n-1$; $0, n$.
Ist die gesuchte Lösung in Teilgebieten zu ungenau, so verfeinert man dort das Gitter (Schrittweitensteuerung).

Das Beispiel war eine Anfang-(Rand-)Wertaufgabe. Aus der Vorschrift für den zeitlichen Anfang (Wärmeverteilung für $t = 0$) rechneten wir sukzessive aus die Wärmeverteilung für $t = t_1, t_2, \ldots$ (bis auf die Pkte am Rand).

Ein anderes Problem sind Randwert-aufgaben:

Bsp.: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ für $a \le x \le b,\ c \le y \le d$ (7)

$u(x, c), u(x, d), u(a, y), u(b, y)$ vorgeschrieben für $a \le x \le b,\ c \le y \le d$.



Gibt es Widersprüche, wenn wir diskretisieren und Werte einer Näherungslösung ausrechnen? Versuch:

Diskretisierung: $\Delta x = \Delta y = h$

$$x_i = \underbrace{x_0}_{=a} + i \cdot h \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n = \frac{b-a}{h}$$

$$y_j = c + j\,h \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m = \frac{d-c}{h}$$

$$u_{xx} \ldots \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \qquad (1 \le i \le n-1,\ j = 0, 1, \ldots, m)$$

$$u_{yy} \ldots \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} \qquad (0 \le i \le n,\ 1 \le j \le m-1)$$

(7) wird zu:

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij} = 0$$

$$(1 \le i \le n-1;\ 1 \le j \le m-1)$$

$(n-1)\cdot(m-1)$ Gleichungen für

$$(n-1)(m-1) + 2(n-1) + 2(m-1)$$