10.2.18 Lineare pDgln 2.O.: Sinn der Klassifikation?

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + 2D u_x + 2E u_y + F = 0 \quad (*)$$

mit Fktn $A(x,y), \dots, F(x,y)$

$(*)$ ist elliptisch für $AC - B^2 > 0$

parabolisch $= 0$

hyperbolisch $< 0$

Wir setzen an eine KT:

$$\left.\begin{aligned} x &= X(\xi, \eta) \\ y &= Y(\xi, \eta) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y) \\ \eta &= \eta(x,y) \end{aligned}\right.$$

Wir interessieren uns im Augenblick nur für die zweiten Ableitungen $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{yy}$.

$$u(x,y) = U(\xi,\eta)$$

$$u_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x , \quad u_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y$$ Kettenregel

$$u_{xx} = U_{\xi\xi}\, \xi_x^2 + 2\, U_{\xi\eta}\, \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta}\, \eta_x^2 +$$
$$+ U_\xi\, \xi_{xx} + U_\eta\, \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = U_{\xi\xi}\, \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta}\left(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x\right) + U_{\eta\eta}\, \eta_x \eta_y$$
$$+ U_\xi\, \xi_{xy} + U_\eta\, \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi}\,\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\,\xi_y\,\eta_y + U_{\eta\eta}\,\eta_y^2$$
$$+ U_{\xi}\,\xi_{yy} + U_{\eta}\,\eta_{yy}$$

Transformierte pDgl:

$$\underbrace{\left(A\,\xi_x^2 + 2B\,\xi_x\,\xi_y + C\,\xi_y^2\right)}_{=:a} U_{\xi\xi} +$$
$$+ 2\underbrace{\left(A\,\xi_x\,\eta_x + B\left(\xi_x\,\eta_y + \xi_y\,\eta_x\right) + C\,\xi_y\,\eta_y\right)}_{=:b} U_{\xi\eta} +$$
$$+ \underbrace{\left(A\,\eta_x^2 + 2B\,\eta_x\,\eta_y + C\,\eta_y^2\right)}_{=:c} U_{\eta\eta} + \ldots = 0$$

$$b = A\left(\xi_x + \frac{B}{A}\xi_y\right)\left(\eta_x + \frac{B}{A}\eta_y\right) + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\xi_y\,\eta_y$$

Gelingt es z. B. zu erreichen, dass $a = 0$ wird, so ist $(*)$ vereinfacht.

Hat die Dgl.

$$A\,z_x^2 + 2B\,z_x z_y + C\,z_y^2 = 0 \qquad (1)$$

zwei Lösungen $\xi, \eta$ so dass $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ eine Variablentransformation ist, so erreicht man $a = 0 = c$.

(1) heißt charakteristische Dgl zu $(*)$

Die Höhenlinien der Graphen von Lösungen von (1) heißen Charakteristiken von $(*)$.

Wir betrachten die pDgl (1):

Wir betrachten nur den Fall $A \neq 0$:

$$A\left(z_x^2 + 2 z_x \cdot \frac{B}{A} z_y + \left(\frac{B}{A} z_y\right)^2\right) - \frac{B^2}{A} z_y^2 + C z_y^2 = 0$$

$$A\left(z_x + \frac{B}{A} z_y\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right) z_y^2 = 0$$