Zentralübung

63. Eindeutigkeit der Exponentialfunktion

Die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen von $f' = af$, $a \in \mathbb{R}$, bilden einen eindimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Für $a = 1$ ist exp die einzige Lösung mit $f(0) = 1$.

64. Differentialgleichung erster Ordnung

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ stetig. Für ein Intervall I heißt $x : I \to (a, b)$ Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x),$$

falls $\dot{x}(t) = f(x(t))$ für alle $t \in I$. Sei $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$.

(a) Dann ist F injektiv und die auf dem maximalem Definitionsbereich definierte Umkehrabbildung F^{-1} ist eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$.

(b) Jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ ist von der Form $x(t) = F^{-1}(t - t_0)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.

65. Stammfunktionen von Potenzreihen

(a) Ist $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine relle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$, dann hat $Q(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ den gleichen Konvergenzradius und für $|x| < R$ ist Q eine Stammfunktion von P.

(b) Für $x \in (-1, 1)$ gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^{n+1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$.

66. Legendre-Transformation

Die Legendre-Transformierte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f^*(\xi) := \sup_{x \in \mathbb{R}} (x\xi - f(x)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

(a) Ist f strikt konvex und zweimal stetig differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, so ist f^* an der Stelle $\xi := f'(x_0)$ gegeben durch

$$f^*(\xi) = x_0\xi - f(x_0).$$

(b) Aus $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $f^*(-\xi) = f^*(\xi) = \sup\limits_{x \geq 0} (x\xi - f(x))$ für $\xi \geq 0$.

(c) Für $a > 0$ und $f(x) = \frac{a}{2}(x - x_0)^2 + y_0$ ist $f^*(\xi) = \frac{1}{2a}(\xi + ax_0)^2 - \frac{a}{2}x_0^2 - y_0$.

(d) Für $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ist $g^*(\xi) = \begin{cases} -\sqrt{1 - \xi^2}, & \xi \in [-1, 1], \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$

67. (∗) Abelscher Grenzwertsatz

Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, so gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Hinweis: Man zeige, dass $r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = R_n x^{n+1} - (1 - x) \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} R_k x^k$ gilt, wobei $R_n := r_n(1)$, und $r_n(x)$ auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Hausaufgaben

67. Grenzwerte

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$, (d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} x^{1/\cos x}$.

68. Kurvendiskussion

Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$.

a) Untersuchen Sie Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f.

b) Untersuchen Sie Monotonie, und (lokale) Extrema von f. Warum ist f strikt konvex?

c) Skizzieren Sie die Funktion.

69. Stammfunktionen von Potenzreihen

(a) Für $x \in [-1, 1)$ gilt $\log(1 - x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(b) Für $x \in [-1, 1]$ gilt $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

70. Legendre-Transformation

Geben Sie (mit Skizze) die erste und zweite Legendre-Transformierte von

(a) $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + 1)^2$ und (b) $g(x) = \frac{1}{2}(|x| - 1)^2$.

an.

Abgabe der Hausaufgaben: 11/12.12.2008, in den jeweiligen Tutorübungen