TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 14

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z14.1. (a) Was versteht man unter einem Normalbereich in der (x, y)-Ebene?

(b) Skizzieren Sie $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$. Berechnen Sie das Volumen von G.

(c) Man berechne den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\sqrt{\tan(1/2)}} \frac{2x}{(1 + x^4)\,[\arctan^2(x^2) - 1]}\,\mathrm{d}x$$

mittels der Substitution $u = \arctan(x^2)$. (Tipp: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

Z14.2. Gegeben seien das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + 5y \\ x^2 - 5x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

und der Zylinder

$$Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes durch die gesamte Oberfläche des Zylinders (von innen nach außen).

Wie bestimmt man in einem Punkt der Mantelfläche von Z den äußeren Einheitsnormalenvektor?

Z14.3. Gegeben Sei die 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie die komplexe Fourierreihe $F_f(x)$ von $f(x)$. Welcher Wert ergibt sich für $F_f(0)$ und $F_f(1)$?

(b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(c) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvegiert die Fourierreihe F_f und warum?

Z14.4. Wir betrachten die Funktion $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}; f(x, y) = (y^3 - y) \sin(4x)$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hessematrix $Hf(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie im Inneren des Definitionsbereichs (d.h. für $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$) sämtliche lokalen Extremalstellen von f und klassifizieren Sie diese.

(c) Bestimmen Sie das globale Minimum und das globale Maximum von f jeweils auf dem gesamten Definitionsbereich.

Hinweis: Es gilt $\sin(4) < 0$.

bitte wenden

(d) Nimmt jede Funktion $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ein globales Maximum und Minimum an?

Z14.5. Gegeben ist die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) + y'(x) - 12y(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung. Wie lautet die Lösung dieser Differentialgleichung zu den Anfangswerten $y(0) = \frac{3}{100}$, $y'(0) = -\frac{1}{50}$?

(b) Wie transformiert man eine explizite skalare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung auf ein äquivalentes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung? Geben Sie für obige Differentialgleichung zweiter Ordnung dieses Differentialgleichungssystem erster Ordnung an und schreiben Sie die aus (a) gewonnene Lösung in eine Lösung des Differentialgleichungssystems um.

Z14.6. Es seien die Kurve $\mathbf{c}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cosh t, \sqrt{3}\sinh t, t)^T$ sowie das Vektorfeld $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (z+3, bz^2, 2yz+x)^T$ gegeben, wobei $b \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\mathbf{c}$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

(c) Zeigen Sie, daß es genau einen Wert $b = b^*$ gibt, so daß das Vektorfeld $\mathbf{v}$ konservativ ist, und bestimmen Sie b^*.

Für den Rest der Aufgabe sei nun $b = b^*$. Bestimmen Sie ein Potential von $\mathbf{v}$. Berechnen Sie mit diesem Potential erneut das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus (b).

Z14.7. (a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{6t}.$$

Hinweis zur Kontrolle: Die Eigenwerte lauten 3 und 9.

(b) Berechnen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems zum Anfangswert $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(c) Kann man jede (lineare) explizite skalare Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben? Kann man umgekehrt jedes System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zu einer (linearen) expliziten skalaren Differentialgleichung höherer Ordnung umschreiben? Begründen Sie ihre Antwort.

Z14.8. (a) Betrachten Sie die Gleichung

$$x = y\ln(y) + y$$

zusammen mit dem Punkt $(x,y) = (1,1)$ und zeigen Sie dass eine Funktion $y = g(x)$ existiert die in einer Umgebung von $x = 1$ die obige Gleichung erfüllt.

(b) Bestimmen Sie nun das Taylorpolynom 2ter Ordnung von g zum Entwicklungspunkt $x = 1$.
Hinweis: Bestimmen Sie die Ableitungen von g bei $x = 1$ mittels implizitem Differenzieren.