TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 11

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z11.1. *Ein Anfangs- und ein Randwertproblem.* Lösen Sie das Anfangswertproblem (a) und das Randwertproblem (b) durch geeignete Substitution und anschließender Trennung der Variablen. Bestimmen Sie außerdem das maximale Existenzintervall der Lösungen.

(a) $x^2y' = y^2 + xy, \quad y(1) = -1$

(b) $xy'' = (x^3 + 2)y', \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$

Z11.2. *Die Kettenlinie.* Hängt ein biegeweiches Seil unter seiner eigenen Last zwischen zwei Punkten, so genügt dessen Form der Differentialgleichung

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}, \quad (a > 0).$$

(a) Mit Hilfe der Substitution $v(x) := y'(x)$ erhält man eine separierbare Differentialgleichung für v. Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung durch Trennung der Variablen.

(b) Bestimmen Sie aus Ihrer Lösung $v(x)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y(x)$.

(c) Lösen Sie für den Fall $a = \frac{1}{2}$ das Randwertproblem $y(-1) = 1 = y(1)$. Wie tief hängt das Seil am Punkt $x = 0$ in diesem Fall?

(d) Zeigen Sie, dass der Zusammenhang zwischen der Seillänge L auf dem Interval $[-1, 1]$ und der Konstanten a im Randwertproblem der Teilaufgabe (b) gegeben ist durch

$$L = 2a \sinh \frac{1}{a}.$$

Z11.3. *Eine skalare lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.* Bestimmen Sie die allgemeine, reelle Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung.

$$\left[\frac{1}{2}\big(y' - y\big)' - 4y\right]' = -6y$$

Tutorübungen

T11.1. *Satz von Picard-Lindelöf und Eindeutigkeit.*

(a) Zeigen Sie dass die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = y^{2/3}$ mit $y(0) = 0$ ist.

(b) Finden Sie noch eine andere Lösung dieses Anfangswertproblems. (*Tipp:* Denken Sie an eine sehr einfache Funktion.)

(c) Warum ist dies kein Wiederspruch zum Satz von Picard-Lindelöf?

T11.2. Lösen Sie das Anwangswertproblem $\frac{y'(x-y)-(1-y')}{x-y+1} = 0$ mit dem Anfangswert $y(x_0) = 3$ wobei $x_0 = 1$ ist. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor.

(a) Bringen Sie die Differentialgleichung in die Form $y' = \frac{1}{ax+by+c}$.

(b) Benutzen Sie das Vorgehen das in der Vorlesung zum Differentialgleichungstyp

$$y' = f(ax + by + c)$$

vorgestellt wurde um die Differentialgleichung zu lösen.

T11.3. *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung.* Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen mittels der Transformation die in der Vorlesung für *Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen* vorgestellt wurde.

(a) $y' = \frac{3y^2+9x^2}{2xy}$ für $x > 0$ und

(b) $y - xy' = \sqrt{x^2 - y^2}$ ebenfalls für $x > 0$.

Tipps:

(a) Zähler und Nenner durch x^2 dividieren

(b) Bestimmen Sie zuerst die Menge auf der die Wurzel überhaupt definiert ist und lösen Sie dann nach y' auf.

T11.4. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine reelle Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen.

(a) $(5 + \frac{4}{5})y(x) = (2y(x) - \frac{1}{5}y'(x))'$

(b) $g'''(x) - 6g''(x) + 11g'(x) - 6g(x) = 0$

Die Tutoraufgaben werden am 10.07.2017 besprochen.