TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 10

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z10.1. *Berechnung eines Volumens mit dem Satz von Gauß.*

(a) Folgern Sie aus dem Satz von Gauß: Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normalen $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Dann gilt

$$\mathrm{vol}(G) = \frac{1}{3} \oint_{\partial G} \mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{o}.$$

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers G, der von der Ebene $z = 0$ und dem elliptischen Paraboloid $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ begrenzt wird, wobei $a, b > 0$.

Z10.2. Verifizieren Sie den Integralsatz von Stokes für das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

und die Flache $F \subset \mathbb{R}^3$ mit $F := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 - y^2 = z\}$.

Z10.3. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = 2y \cdot x^{-1}, \quad (x \geq 1).$$

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(2) = 1$ zuerst näherungsweise anhand des Richtungsfeldes und anschließend durch Trennung der Variablen.

bitte wenden

Tutorübungen

T10.1. Sei $\mathbf{H}(\mathbf{x}) := (2xy^3 - xy, 3x^2y^2 + x^3, y^2 + \mathrm{e}^{z^2})^T$ ein auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiertes Vektorfeld.

(a) Stellen sie fest ob $\mathbf{H}$ ein konservatives Vektorfeld ist.

(b) Es sei die Fläche $B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1 \wedge z = 0\}$ gegeben. Bestimmen Sie nun den Fluss $\nabla \times \mathbf{H}$ durch die Fläche B indem Sie das zugehörige *Oberflächenintegral 2. Art* $\int_B \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{o}$ direkt berechnen.

(c) Berechnen Sie nun das *Kurvenintegral 2. Art* über die Randkurve ∂B von B, d.h. $\oint_{\partial B} \mathbf{H}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

(d) Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse und erläutern Sie den Zusammenhang zwischen den beiden Integralen.

T10.2. (a) Sei $\mathbf{G}(\mathbf{x}) := (xz, xy, -z)^T$ die Abbildungsvorschrift für das Vektorfeld $\mathbf{G}$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie für $A := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 - y^2 = z, z \geq 0\}$ das *Oberflächenintegral 2. Art* $\int_A \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{o}$ mit Hilfe des *Satzes von Stokes*.

(b) Die Abbildungsvorschrift $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := y \cdot \begin{pmatrix} xy \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ definiert ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das *Oberflächenintegral 2. Art* $\oint_{\partial D} \mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{o}$ für die Menge $D := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, |z| \leq 1\}$ mit Hilfe des *Integralsatzes von Gauß*.

T10.3. Berechnen Sie folgendes Oberflächenintegral mit Hilfe des Satzes von Gauß,

$$\oint_{\partial A} x \begin{pmatrix} yx^2 \\ y^3 \\ \cos(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\mathbf{o},$$

wobei die geschlossene Fläche ∂A der Rand der Menge

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \wedge z \in [0, 1] \right\}$$

ist. Die Verwendung von *Zylinderkoordinaten* könnte sich als nützlich erweisen.

T10.4. Bestimmen Sie für die folgenden Anfangswertprobleme jeweils eine Lösung und bestimmen Sie zudem das maximale Existenzintervall.

(a) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y}$ mit $y(x_0) = -2$ wobei $x_0 = 1$ und

(b) $y' = \dfrac{1}{y(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x})}$ mit $y(x_0) = 1$ wobei $x_0 = 1$ ist.

Die Tutoraufgaben werden vom 03.07.2017 besprochen.