TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 9

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z9.1. Wir betrachten das Kraftfeld $\mathbf{K}(x,y,z) := (2\,x\,z^3 + 6\,y, 6\,x - 2\,y\,z, 3\,x^2\,z^2 - y^2)^T$ auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie den Wert des folgenden Kurvenintegrals für die Gerade $\mathbf{c}$ vom Punkt $(0,0,0)^T$ zum Punkt $(2,1,-2)^T$,

$$U = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{K}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{K}$ konservativ ist.

(c) Berechnen Sie ein Potential für $\mathbf{K}$.

(d) Bestätigen Sie das Ergebnis aus (a) unter Verwendung des Potentials.

Z9.2. Man betrachte das Kraftfeld $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne das Kurvenintegral von $\mathbf{K}$ entlang der Kurve $\mathbf{c}(t) := (\cos(t), \sin(t))^T$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{K}$ auf der Menge $D := \{(x,y) : x > 0\}$ ein Potential besitzt.

(c) Warum kann man das Potential aus (b) nicht auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fortsetzen? Begründen Sie ihre Antwort mit Hilfe von (a).

Z9.3. Wir betrachten das Kraftfeld $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Abbildungsvorschrift

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y + 7 \\ 4xy^2 \end{pmatrix}$$

und die Menge $E := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2^2} + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie mit dem *Integralsatz von Green* das Integral

$$\int_E \operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

bitte wenden

Tutorübung

T9.1. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

skizzieren Sie den Integrationsbereich und berechnen Sie das Integral anschließend nochmal mit vertauschter Integrationsreihenfolge (bei erforderlicher Anpassung der Integrationsgrenzen).

T9.2. Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunkts entlang der Kurve

$$c(t) = (\sin(t), \cos(t), t)^T, \quad t \in [0, 2\pi]$$

unter der Wirkung des auf ganz $\mathbb{R}^3$ definierten Kraftfeldes

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x^2 + 5y + 3yz \\ 5x + 3xz - 2 \\ 3xy - 4z \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{K}$ konservativ ist.

(b) Berechnen Sie ein Potential für $\mathbf{K}$.

(c) Berechnen Sie die bei der oben beschriebenen Bewegung geleistete Arbeit.

(d) Ändert sich der Wert des Arbeitsintegrals bei einer Änderung der Parametrisierung des Geradenstücks? Ändert er sich bei Wahl einer anderen Verbindungskurve der Punkte $(0, 1, 0)$ und $(0, 1, 2\pi)$, z.B. entlang einer Parabel? Welche Arbeit wird bei der umgekehrten Bewegung, d.h. vom Punkt $(0, 1, 2\pi)$ zum Punkt $(0, 1, 0)$ verrichtet?

T9.3. Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{K}(x, y) := \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^3 - xy \\ x^3 + 3x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\mathbf{K}$ konservativ?

(b) Berechnen Sie die in der Fläche $F := [0, 1] \times [-1, 1]$ auftretende Rotation des Kraftfelds $\mathbf{K}$, also

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{K}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

wobei $\operatorname{rot} \mathbf{K} = \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y}$.

(c) Bestimmen Sie eine Kurve $\mathbf{c}$, welche den Rand von F im positiven Sinne durchläuft (daher "gegen den Uhrzeigersinn"). Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art von $\mathbf{K}$ entlang dieser Kurve $\mathbf{c}$. Welchen Wert würden Sie hier für ein konservatives Vektorfeld $\mathbf{K}$ erwarten?
(Tipp: Der Rand von F besteht aus 4 Teilen, daher bietet es sich an die Kurve $\mathbf{c}$ ebenfalls in 4 Teilsstücke zu zerlegen. Zum Beispiel wird der Bereich $[0, 1] \times \{-1\}$ von der Kurve $\mathbf{c}_1(t) := (0, -1)^T + t(1, 0)^T)$ für $t \in [0, 1]$ durchgelaufen.)

(d) Erläutern Sie den Ursprung der Beziehung zwischen den beiden Ergebnissen.
(Hinweis: Wiederholen Sie den Integralsatz von Green.)

Die Tutoraufgaben werden am 26.06.2017 besprochen.