TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 8

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z8.1. *Transformationssatz, Kugelkoordinaten.* Berechnen Sie den Schwerpunkt eines homogenen Kugeloktanten:

$$V := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^3 \leq 1 \wedge x,y,z \geq 0\}$$

unter verwendung der Kugelkoordinaten aus der Vorlesung.

Z8.2. *Bereichsintegral.* Es sei die Menge

$$B := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$$

zusammen mit dem Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift $f(x,y,z) = xyz$ gegeben.

Fertigen Sie eine Skizze von B an und begründen Sie dass B ein Normalbereich ist. Berechnen Sie anschließend erst das Integral

$$\iiint_B f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

in der Integrationsreihenfolge „$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$“ und dann in der Reihenfolge „$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$“. Vergleichen Sie anschließend die Ergebnisse.

Z8.3. *Arbeitsintegral.* Berechnen Sie das *Kurvenintegral 2. Art* für das stetige Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die C^1-Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die gegeben sind durch

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y(x^2+y^2) \\ x(x^2+y^2) \\ z \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\mathbf{c}$ modifiziert zu $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)^T$. Berechnen Sie $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$.

Tutorübungen

T8.1. *Transformationssatz, Zylinderkoordinaten.* Berechnen Sie das Integral

$$\int_Z \rho(x,y,z) \cdot (d(x,y,z))^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

mit den Skalarfeldern $\rho, d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die gegeben sind als $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$ und $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ über den Normalbereich

$$Z := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -2 \leq z \leq 2\}$$

indem Sie den *Transformationssatz* aus der Vorlesung zusammen mit den *Zylinderkoordinaten* benutzen. *Hinweis:* Eine Skizze von Z könnte nützlich sein.

bitte wenden

T8.2. *Bereichsintegral.* Es sei das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y, z) = \mathrm{e}^x y(z-2)^2$ gegeben. Zudem sei die Menge D als

$$D := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 3 \leq z \leq 4 \wedge 1 \leq y \leq 2 \wedge \ln(y) \leq x \leq \ln(2)\}$$

gegeben. Begründen Sie dass D ein Normalbereich ist und berechnen Sie das Bereichsintegral $\iiint_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ ein Mal in der Integrationsreihenfolge „$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$“ und ein weiteres Mal in der abgeänderten Reihenfolge „$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$“.

T8.3. *Arbeitsintegral.*

(a) Berechnen Sie das *Kurvenintegral 2. Art* für die C^1-Kurve $\mathbf{c} : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ und das stetige Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die gegeben sind durch

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ x(y^2 - z^2) \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}.$$

Welches Integral erhalten wir wenn $\mathbf{c}$ nun in die andere Richtung durchlaufen wird, d.h. $\mathbf{c}^* : [-2, 0] \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}^*(t) = (-t, \cosh(-t), \sinh(-t))^T$?

(b) *Kurvenintegral zweiter Art. Zurück nach Lummerland.* Wir betrachten erneut die Insel *Lummerland* aus **T7.3** die durch $h : [-1, 1] \times [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = x^2 y(2 - y)$ gegeben ist und mit ihr die Strecken aus Teilaufgabe (a) und (b) die durch $\mathbf{c_a}, \mathbf{c}_b : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{c}_a(t) = (t, 2t^2)^T$ und $\mathbf{c}_b(t) = (t, 2t)^T$ als Kurven parametrisiert sind.

Berechnen Sie die Hubarbeit die die Lok *Emma* vom Bahnhof $(x_0, y_0) = (0, 0)$ zum Palast $(x_1, y_1) = (1, 2)$ bei konstanten Gewicht der Lok $G_{Lok} = 1$ auf den beiden Strecken verrichtet indem Sie die *Kurvenintegrale 2. Art* von $\mathbf{c}_a$ und $\mathbf{c}_b$ zum Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f}(x, y) = \nabla h(x, y)$ berechnen.

Die Tutoraufgaben werden am 19.06.2017 besprochen.