TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 7

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z7.1. *Lagrange-Multiplikator.* Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y) := x^2 + 2y^2$ unter Benutzung der Lagrange-Multiplikatorenregel auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $K := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Z7.2. *Implizites Differenzieren.* Wir betrachten die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit der Abbildungsvorschrift

$$\mathbf{f}(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,y_1,y_2) \\ f_2(x_1,x_2,y_1,y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 3 \\ y_1^2(y_2-1)^2 - 1 \end{pmatrix} .$$

Sei nun $g(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$ die implizit durch $\mathbf{f}(x_1,x_2,y_1,y_2) = (0,0)^T$ und $(x_1,x_2,y_1,y_2) = (1,1,1,0)$ definierte Funktion. Berechnen Sie mittels implizitem Differenzieren die Jacobi-Matrix von $\mathbf{g}$ bei $(1,1)$ und folgern Sie daraus was für die lokale Umkehrbarkeit von $\mathbf{g}$ an dieser Stelle folgt.

Z7.3. *Mehrdimensionales Integral.* Berechnen Sie

(a) das Volumen des Körpers der durch die Flächen

$$x = -1; \quad x = 1; \quad y = 0; \quad y = \ln(2); \quad z = 0 \quad \text{sowie} \quad z = x\sinh(y) + \mathrm{e}^{x+\ln(y)}$$

begrenzt wird und

(b) für $a \in \mathbb{R}$ das Integral $\displaystyle\int_0^2 \int_1^2 \int_0^1 (x-a)^2 yz \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ und finden Sie alle $a \in \mathbb{R}$ für die dieses Integral gleich Null ist.

Tutorübungen

T7.1. Sei die Menge $M := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ sowie das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2$ gegeben. Bestimmen Sie die globalen Extrema von f eingeschränkt auf die Menge M indem Sie unter anderem die Lagrangesche Multiplikatorregel benutzen.

T7.2. Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{f}(x,y,v,w) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - (v-1)^2 + w - 5 \\ xyvw + (w+1)^2 - v \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei nun $\mathbf{g}(x,y) = (v,w)$ die implizit durch $\mathbf{f}(x,y,v,w) = (0,0)^T$ und $(x,y,v,w) = (1,2,1,0)$ gegebene Funktion. Berechnen Sie mittels implizitem Differenzieren die Jacobi-Matrix von $\mathbf{g}$ bei $(x,y) = (1,2)$ und ermitteln Sie dann ob $\mathbf{g}$ an dieser Stelle lokal umkehrbar ist.

bitte wenden

T7.3. *Die Insel Lummerland.* Die Insel *Lummerland* hat bekanntlich zwei Berge und werde beschrieben durch das Höhenprofil

$$h(x,y) = x^2y(2-y)$$

mit $(x,y) \in [-1,1] \times [0,2]$. Vom Bahnhof $(x_0,y_0) = (0,0)$ zum Palast $(x_1,y_1) = (1,2)$ verlaufe eine Bahnstrecke entlang der Parabel $b(x,y) = 0$ mit

$$b(x,y) = x^2 - \frac{y}{2}\,.$$

(a) Berechnen Sie mittes Lagrange-Multiplikator alle lokale und globale Extremstellen von h entlang der Bahnstrecke. (Randpunkte nicht vergessen!) Summieren Sie nun die Beträge der Höhendifferenzen sämtlicher aufeinanderfolgender Extremstellen auf um die von der Lok *Emma* zu bewältigenden Gesamtsteigung zu erhalten.

(b) Nun betrachten wir eine Vergleichsstrecke, die entlang der Geraden

$$y(x) = 2x$$

vom Bahnhof zum Schloß führt. Bestimmen Sie erneut alle lokale und globale Extremstellen, sowie die resultierende Gesamtsteigung.

(c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis der ersten Strecke. Skizzieren Sie das Höhenprofil von $h(x,y)$. Finden Sie anhand der Skizze eine Bahnstrecke von minimaler Gesamtsteigung. Welchen Betrag hat diese minimale Gesamtsteigung?

T7.4. Berechnen Sie

(a) das Volumen des Körpers der durch die folgenden Flächen begrenzt wird:

$$x = 0; \quad x = 2; \quad y = 1; \quad y = 2; \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = x^2 + y^2\,,$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{3\pi/2} \sin(x - \tfrac{\pi}{2})yz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

(c) für $a \in \mathbb{R}$ das Integral $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 ax^3 + 2xy - y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, sowie diejenigen $a \in \mathbb{R}$ für die dieses Integral gleich Null wird und

(d) das über dem Meeresspiegel $h = 0$ liegende Volumen der Insel *Lummerland* aus **T7.3** die von $f(x,y) = x^2y(2-y)$ auf $[-1,1] \times [0,2]$ beschrieben wird.

Die Tutoraufgaben werden am 12.06.2017 besprochen.