TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 5

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z5.1. *Mehrdimensionale Extremstellen und Taylorpolynom.* Sei das Skalarfeld $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=12(x^2(y^2+1)+y(y-4x)-1)$ gegeben.

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ sowie die Hesse-Matrix $\mathrm{H}_f(x,y)$ und finden Sie alle Extremstellen von f, d.h. alle Stellen $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $\nabla f(x,y)=(0,0)^T$.

(b) Bestimmen Sie die Definitheit der Hesse-Matrix $\mathrm{H}_f(x,y)$ an allen Extremstellen und untersuchen Sie damit um welche Art Extrema es sich handelt, falls die Definitheit darüber Aufschluss gibt.

(c) Stellen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f bei $(x,y)=(1,1)$ auf. Geben Sie letztlich noch das Taylorpolynom vierten Grades von f ohne Rechnung an.

Z5.2. *Jacobi-Matrix und Kettenregel.* Seien $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ und $\mathbf{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ gegeben als

$$\mathbf{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} z^3\cos(xy)\\ \frac{x}{\ln(z^2+3)+3}\end{pmatrix}\qquad \text{und } \mathbf{g}(x,y)=\begin{pmatrix} x^2+y^2\\ x^2-y^2\\ y\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(x,y,z)$, $\mathrm{J}_{\mathbf{g}}(x,y)$ und $\mathrm{J}_{(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})}(2,0)$.

Z5.3. *Kugelkoordinaten und kartesische Korrdinaten.*Für $r\in]0,\infty[$, $\theta\in\,]0,\frac{\pi}{2}]$ und $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, sowie für $x,y,z>0$ seien die beiden Funktionen

$$\mathbf{f}(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ r\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ r\cos(\theta)\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \mathbf{g}(x,y,z)=\begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \arctan(\frac{y}{x})\\ \arccos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})\end{pmatrix}$$

definiert (Transformation bzw. Rücktransformation zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten).

Zeigen Sie daß

$$(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(r,\varphi,\theta)\quad\text{und}\quad(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y,z)$$

jeweils die Identitätsabbildung liefern.

Tutorübungen

T5.1. *Extremstellen und Taylorpolynom.* Führen Sie die Schritte (a) und (b) aus **Z5.1** für die Skalarfelder

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x(x^4 - 5y) + y^5$ und
(2) $g :]-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\times]-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \cos(x+y) - (x-y)^2$ aus.

aus. Stellen Sie nun das Taylorpolynom zweiten Grades von f und von g bei $(x,y) = (0,0)$ auf.

T5.2. *Fortsetzung **Z4.3**: Weitere Rechenregeln.* Zeigen Sie für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar, dass

(a) $\operatorname{rot}(\nabla\phi) = 0$,
(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$,
(c) $\nabla\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) = \frac{1}{(g(x,y))^2}\Big(g(x,y)\cdot\nabla f(x,y) - f(x,y)\cdot\nabla g(x,y)\Big)$ gilt und
(d) berechnen Sie mittels (c) den Gradienten $\operatorname{grad}\left(\frac{x^2-2y^2}{\sqrt{4+xy}}\right)$.

T5.3. *Jacobi-Matrix.*

(a) Sei das Skalarfeld $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y,z) = -(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-z^2}$ gegeben. Berechnen Sie sowohl den Gradienten als auch die Jacobi-Matrix von h. Welche Verbindung zwischen Gradient und Jacobi-Matrix stellen Sie fest?
(b) Berechnen Sie für die Vektorfelder $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ aus **Z5.2** die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}_{(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})}(x,y,z)$ und werten Sie diese bei $(0, 2, \sqrt{\mathrm{e}^2 - 3})$ aus.

T5.4. *Fortsetzung **Z5.3***. Wir betrachten erneut $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ aus **Z5.3**.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix J von $\mathbf{f}$ an der Stelle $(r, \varphi, \theta) = (1, 0, \frac{\pi}{2})$, sowie deren Inverse $\mathrm{K} := (\mathrm{J})^{-1}$.
(b) Zeigen Sie, daß K die Jacobi-Matrix von $\mathbf{g}$ an der Stelle $(x,y,z) = (1,0,0)$ ist.

Die Tutoraufgaben werden am 29.05.2017 besprochen.