TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 4

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z4.1. *Ein Randwertproblem.*

(a) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der Funktion $f(t) = |\sin t|$. Konvergiert die Fourier-Reihe? Wenn ja, in welchem Sinne?

(b) Berechnen Sie für $\omega \notin \mathbb{Z}$ die Koeffizienten $\gamma_k \in \mathbb{C}$ derart, daß die Fourier-Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

Lösung des Randwertproblems $\ddot{x} + \omega^2 x = |\sin t|$ mit $x(0) = x(2\pi)$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$ ist.

Z4.2. *Partielle Ableitungen.* Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \exp(2xy)$ gegeben.

(a) Überlegen Sie zunächst warum alle mehrdimensionalen Polynome beliebig oft stetig partiell differenzierbar sind und folgern Sie daraus dass f beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist.

(b) An welchen Stellen wird $\nabla f(x, y) = 0$?

(c) Skizzieren Sie die Höhenlinien zu den Höhen $1, \mathrm{e}^2, \mathrm{e}^4, \mathrm{e}^{-2}$ von f für $-3 \le x, y \le 3$.

(d) Besitzt f auf dem Quadrat $Q = \{(x, y) \mid -3 \le x, y \le 3\}$ ein Maximum und ein Minimum?

Z4.3. *Zwei Rechenregeln für den Gradienten und die Divergenz.* Zeigen Sie folgende Rechenregeln für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sie dürfen dabei davon ausgehen dass alle Funktionen beliebig oft stetig partiell differenzierbar sind.

(a) $\nabla(f \circ g) = (f' \circ g)\nabla g$

(b) $\nabla \cdot (g \cdot \mathbf{h}) = \nabla g \cdot \mathbf{h} + g \cdot (\nabla \cdot \mathbf{h})$

Z4.4. *Gradient, Divergenz und Laplace-Operator.*

(a) Berechnen Sie

i. $\nabla f(\mathbf{x})$ für $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$.

ii. $\nabla g(x, y)$ und $\nabla \cdot (\nabla g(x, y))$ mit $g(x, y) = x^y$ und $x > 0$, $y \notin \{0, 1\}$.

(b) Sind die folgenden Funktionen harmonische Funktionen?

i. $\arctan(y/x)$,

ii. $\mathrm{e}^x \sin(y) - 3x^2 y + y^3 + 2x$.

bitte wenden

Tutorübungen

T4.1. Wir betrachten die direkte Fortsetzung f_d der Funktion $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & 2 < x \leq 3, \\ 4 & 3 < x < 4. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe von f_d.

(b) Für welche der Werte $x = 1, 2, 3, 4$ konvergiert die berechnete Fourierreihe? Geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Grenzwerte an.

(c) Bestimmen Sie die Fourierreihe der verschobenen Funktion $g(x) := f_d(x+2)$.

(d) Bestimmen Sie die Fourierreihe der Ableitung $f'(x)$.

T4.2. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) Den Gradienten $\nabla f(x,y,z)$ mit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $f(x,y,z) = \sin\left(3x^2\sqrt{y} + \cos(3x)\right)$.

(b) Die Hesse-Matrix $\mathrm{H}g(x,y)$ mit $g :]0,\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x,y) = \frac{4y}{(y^2+1)x}$.

(c) Die Divergenz $\nabla \cdot \begin{pmatrix} \sin(x)\cos(y) \\ \cos(x)\sin(y) \end{pmatrix}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

T4.3. (a) Berechnen Sie für $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = xy\mathrm{e}^{-4(x+y)^2}$ den Gradienten.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ für die $\nabla h(x,y) = (0,0)^T$ gilt.

(c) Berechnen Sie nun die Richtungsableitung von h an der Stelle $\mathbf{x} = (1,0)$ in Richtung $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, das bedeutet berechnen Sie die Ableitung von $t \mapsto h(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ an der Stelle $t = 0$.

(d) Bestimmen Sie letztlich $\langle \nabla h(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle$ und vergleichen Sie den Wert mit der Richtungsableitung der vorhergehenden Teilaufgabe.

Die Tutoraufgaben werden am 22.05.2017 besprochen.