TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
ZENTRUM MATHEMATIK
PD Dr. Andreas Johann

Höhere Mathematik II für Bau, Geo, Umwelt — Blatt 2

Sommersemester 2017

Zentralübung

Z2.1. *Uneigentliche Integrale*

(a) Betrachten Sie für $\alpha > 0$ die beiden uneigentlichen Integrale $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ und $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Für welche Werte von α existieren diese? Geben Sie gegebenenfalls das Ergebnis an.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a) die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Z2.2. Der Graph der Funktion $y = f(x) = \mathrm{e}^x$, die x-Achse, sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = \ln(2)$ schließen die Fläche A ein. Diese rotiere um die x-Achse.

(a) Fertigen Sie eine Skizze der Fläche A in der (x, y)-Ebene an.

(b) Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers.

Z2.3. Betrachten Sie die Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die durch $t \mapsto (2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))^T$ gegeben ist.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

(b) Bestimmen Sie die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{\mathbf{c}}$ der Kurve.

(c) Wir stellen uns die Kurve als einen Draht mit konstanter Massendichte $\rho(t) := 1$ vor.
Berechnen Sie den Schwerpunkt des Drahts.

Tutorübungen

T2.1. *Uneigentliche Integrale.*
Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale und geben Sie Ihren Lösungsweg an!

(a) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \ln(2x-1)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-2/x}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6x^2}{4x^6+1}\,\mathrm{d}x$ und

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Benutzen Sie bei c) die Substitution ax^3 (wobei Sie $a \in \mathbb{R}$ noch bestimmen müssen) und bei d) hilft 2-maliges partielles Integrieren weiter.

bitte wenden

T2.2. *Rotationskörper.*

(a) Die einzelnen Kabel eines Kabelstrangs an einer Hängebrücke werden mit Manschetten fixiert. Diese Manschetten lassen sich als Rotationskörper einer Fläche A, die um die x-Achse rotiert und in der (x, y)-Eben liegt, beschreiben. Diese Fläche A ist dabei nach oben durch den Halbkreis K mit Gleichung $x^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$ mit $y \geq 2$ und nach unten durch die Gerade $y = 2$ gegeben. Eine grobe Abbildung der Manschette in 3D ist rechts zu sehen (Vorsicht! Keine Achsen gegeben).

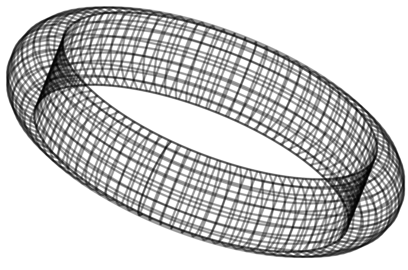

Abbildung T2.2 (a) Die Manschette für den Kabelstrang.

Wir wollen nun wissen, welche Menge an Material für eine Manschette benötigt wird und welche Oberfläche der Korrosion durch Umwelteinflüsse standhalten muss.

i. Fertigen Sie zunächst eine Skizze der Fläche A in der (x, y)-Ebene an.
ii. Berechnen Sie das Volumen der Manschette und berechnen Sie die Oberfläche die durch Rotation von K entsteht.

(b) Ein Wasserkraftwerk soll über einen Trichter von einem Stausee mit Wasser versorgt werden. Der Trichter kann dabei als Rotationskörper einer Fläche A aufgefasst werden die um die x-Achse rotiert. Die Fläche wird in der (x, y)-Ebene durch die Kurven $y = \cosh(x)$, $x = 2$, der x- und der y-Achse begrenzt.

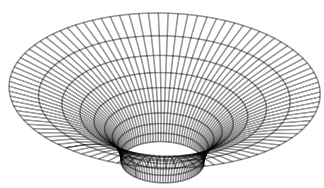

Abbildung T2.2 (b) Der Trichter des Stausees.

Nun soll ermittelt werden wieviel Wasser in den Trichter passt und welche Oberfläche mit Baumaterial ausgekleidet werden muss.

i. Fertigen Sie wieder eine Skizze der Fläche A in der (x, y)-Ebene an.
ii. Berechnen Sie nun das Volumen des Rotationskörpers sowie die Oberfläche des Trichters, d.h. ohne „Deckel-“ und „Bodenfläche“.

Hinweise: Bei (a) werden Sie wahrscheinlich eine Integraltafel benötigen. Bei (b) führt unter anderem partielle Integration zum Ziel zusammen mit der Gleichung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, die Sie benutzen dürfen.

T2.3. *Eine Kurve.*
Wir betrachten für einen Parameter $T > 0$ und einen Parameter $a \in \mathbb{R}$ eine Kurve $\mathbf{c} : [0, T] \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch

$$t \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ a\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2t \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -a\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} .$$

(a) Bringen Sie die Abbildungsvorschrift der Kurve in die Form $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, d.h. „alles in einen Vektor“ und vereinfachen Sie den Ausdruck (*Hinweis:* **HM1: Z15.1** Die Darstellung von $\cosh$ und $\sinh$). Fertigen Sie anschließend eine aussagekräftige Skizze an.

(b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\mathbf{c}$ in Abhängigkeit von $T > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.

(c) Die Parameter seien nun fest als $T = 2$ und $a = 1$ gewählt. Berechnen Sie für die homogene Dichte $\rho : [0, T] \to \mathbb{R}$ mit $\rho(t) = 1$ den Schwerpunkt der Kurve.

Die Tutoraufgaben werden am 08.05.2017 besprochen.