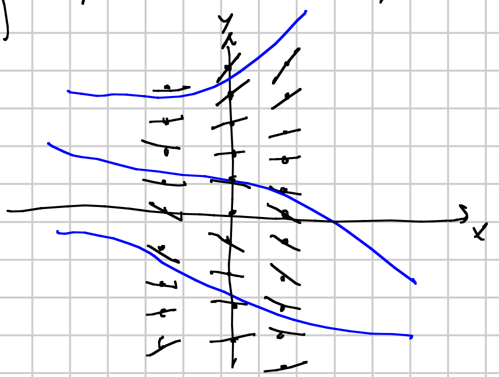
Mathematik 2 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 13

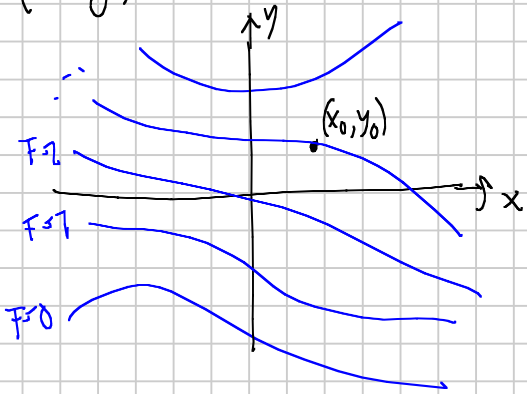
Notiztitel 19.07.2010

84. (a) $y' = f(y,x)$, $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und sternförmig



Zu $F(x,y) = \text{const}$ finde $\tilde{y}(x)$, so dass $\tilde{y}(x_0) = y_0$ und $F(x, \tilde{y}(x)) = \text{const}$.

$F(x,y) = \text{const}$



Satz über impl. Fkt:

$$\tilde{y}'(x) = -\frac{\partial_1 F(x,\tilde{y}(x))}{\partial_2 F(x,\tilde{y}(x))} \quad \forall x \in I$$

d.h. $\tilde{y}$ ist Lösung der Dgl $y' = -\dfrac{\partial_1 F(x,y)}{\partial_2 F(x,y)}$

F heißt Konstante der Bewegung. (Erhaltungsgröße)

(b) $g, h \in C^1(D)$, mit $\boxed{\partial_2 g = -\partial_1 h}$. Dgl. $y' = \dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$

Gilt $\partial_1 F(x,y) = g(x,y)$ und $\partial_2 F(x,y) = -h(x,y)$ ($\operatorname{grad} F = \binom{g}{-h}$), so ist F Konstante der Bewegung

notwendige Bedingung ist $\partial_2\partial_1 F = \partial_2 g = -\partial_1 h = +\partial_1\partial_2 F$

hinreichend, z.B. wenn D offen und sternförmig

(c) Dgl. $y' = h(x)\,g(y) = \dfrac{h(x)}{1/g(y)}$. Suche F mit $\partial_1 F(x,y) = h(x)$ und $\partial_2 F(x,y) = -\dfrac{1}{g(y)}$.

Wähle $H(x) = \int h(x)\,dx$, $G(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy$. Dann ist
$F(x,y) = -G(y) + H(x)$.

Lösung der Dgl. durch Auflösen von $H(x) - G(y) = \text{const}$ nach y

(d) (i) $y' = -\frac{x}{y} = \frac{x}{-y}$ $\quad H(x) = \frac{1}{2}x^2$, $G(y) = -\frac{1}{2}y^2$ $\quad F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

Lsgn: $y = \pm\sqrt{\text{const} - x^2}$

(ii) $y' = 2\frac{y}{x} = \frac{2/x}{1/y}$ $\quad H(x) = 2\ln|x| = \ln(x^2)$, $G(y) = \ln|y|$ $\quad F(x,y) = \ln(x^2) - \ln|y| = \ln\frac{x^2}{|y|}$

$\ln\frac{x^2}{|y|} = c \in \mathbb{R}$ $\quad |y| = e^{-c}x^2$ $\quad y = \pm e^{-c}x^2$

(iii) $y' = \frac{-2xy}{2y+x^2} = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$, $\quad \partial_2 g(x,y) = -2x = -\partial_1 h(x,y)$

Potential: $\partial_1 F(x,y) = -g(x,y) = 2xy \Rightarrow F(x,y) = x^2y + c(y)$

$\partial_2 F(x,y) = h(x,y) = 2y + x^2 \Rightarrow F(x,y) = y^2 + yx^2 + d(x)$

$\Rightarrow F(x,y) = y^2 + yx^2$ ist Konstante der Bewegung

Bemerkung: Konstanten der Bewegung

Bsp: Keplerproblem: Planet um die Sonne. Bahnkurve $x(t) \in \mathbb{R}^3$

Graph von $t \mapsto x(t), v(t)$ ist Kurve in $\mathbb{R}^7$

Energie	1	Zeit invariant	$E(t,\vec{x},\vec{v}) = \text{const}$
Drehimpuls	3	Rotations inv	$\vec{L}(t,\vec{x},\vec{v}) = \text{const} \in \mathbb{R}^3$
Lenz-Runge-Vektor	2	Skaleninvarianz $t \to \lambda^3 t,\ r \to \lambda^2 r,\ p \to \frac{1}{\lambda}p$	$\vec{R}(t,\vec{x},\vec{v}) = \text{const} \in \mathbb{R}^3$

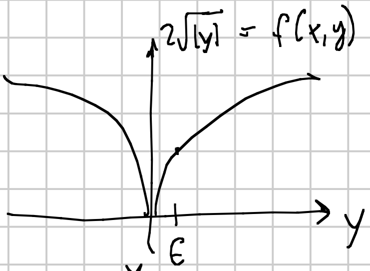
Satz über implizite Funktionen: nach $\vec{x}, \vec{v}$ auflösbar

$\rightarrow$ $\vec{x}(t), \vec{v}(t)$ Keplerbahnen.

---

85 $\quad y' = 2\sqrt{|y|}$ $\quad$ (nicht 4!)

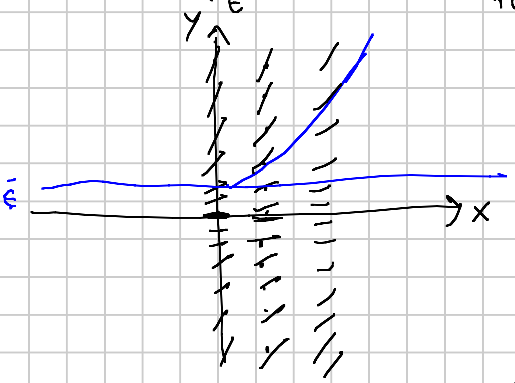
(a) Für welche $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es eindeutige Lösungen?



f ist lokal lipschitzstetig für $y \neq 0$

und global lipschitzstetig auf $\mathbb{R} \times \pm[\epsilon, \infty[$

für alle $\epsilon > 0$

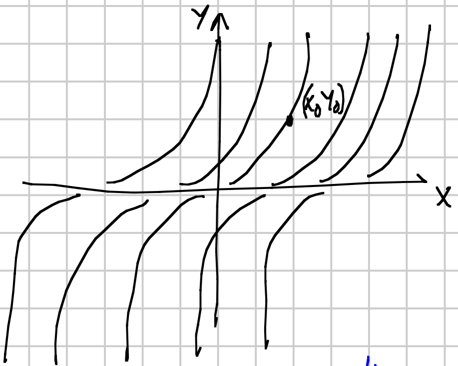


$$y > 0: \quad y' = \frac{2}{y^{-1/2}} \quad \xrightarrow{\int dx} 2(x - x_0) \quad x_0 \in \mathbb{R}$$
$$\xrightarrow{\int dy} 2\sqrt{y}$$

$\Rightarrow$ Konstante der Bewegung $\sqrt{y} = (x - x_0)$

Auflösen: $\quad y = (x - x_0)^2$

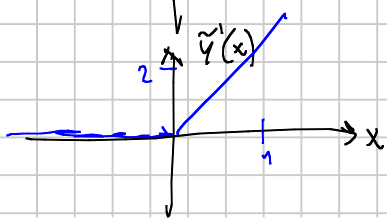
$$\tilde{y}(x) = (x - x_0)^2 \quad \text{für} \quad x \geq x_0$$



(b) $\tilde{y}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung mit $\tilde{y}(1) = 1$

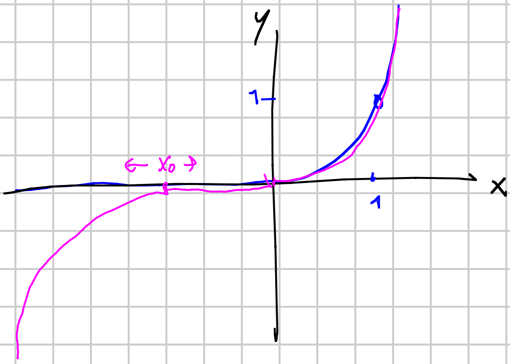
$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

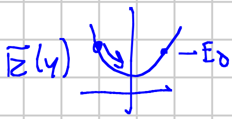
offenbar ist $\tilde{y}'(x) = 2\sqrt{|\tilde{y}(x)|}$ für $x \in \mathbb{R}$



(c) Lösungen zum Anfangswert $\tilde{y}(1) = 1$

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0 & x_0 \leq x \leq 0 \\ -(x-x_0)^2 & x < x_0 \end{cases} \qquad \text{wobei } x_0 \leq 0$$





Kommentar: $\dot{y} = \sqrt{2(E(y) - E_0)}$

---

86. Picard-Iteration

AWA $\quad \dot{y}_1 = 2t y_2, \quad \dot{y}_2 = -2t y_1, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s\, y_2(s) \\ -2s\, y_1(s) \end{pmatrix} ds$$

$$f(t, y_1, y_2) := \begin{pmatrix} 2t y_2 \\ -2t y_1 \end{pmatrix} ; \quad \dot{y} = f(t, y) \quad y \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{R}^2 \ni x_{n+1}(t) := y(0) + \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds \qquad \text{(Picard-Iteration)}$$

$$x_0(t) = 0 \qquad x_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t 0\, ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s \cdot 1 \\ -2s \cdot 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s \cdot 1 \\ -2s^3 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 - \frac{t^4}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s - s^5 \\ -2s^3 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t^2 - \frac{t^6}{6} \\ 1 - \frac{t^4}{2} \end{pmatrix}, \quad x_5(t) = \dots = \begin{pmatrix} t^2 - \frac{t^6}{6} \\ 1 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{24} \end{pmatrix}$$

$$x_6(t) = \dots = \begin{pmatrix} t^2 - \frac{t^6}{6} + \frac{t^{10}}{120} \\ 1 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{24} \end{pmatrix}$$

v.1.

$$\Rightarrow \quad x_{2n}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \tilde{y}(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \begin{pmatrix} \sin t^2 \\ \cos t^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \begin{pmatrix} 2t\cos t^2 \\ -2t\sin t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\,\tilde{y}_2(t) \\ -2t\,\tilde{y}_1(t) \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$