Mathematatik 2 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 11

Notiztitel 05.07.2010

T09 Kinzner Blatt 9 <u>heute</u>
MI 02.08.020 14:15 – 15:45 nachgeholt

Klausur: Di 3.8.2010, 8:30 im MW2001
Hilfsmittel: 2 selbsterstellte Din A4 Blätter
Stoffumfang: Inhalt der Vorlesung, Übungsaufgaben

70. $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, $b \in \mathbb{R}^m$

Löse die Gleichung $f(x,y) = b$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ nach y auf.

$\boxed{m=1}$. $\Rightarrow$ $f(x,y) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} y$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$
$f(x,y) = b$. Nach y auflösbar falls $\alpha_{n+1} \neq 0$. Dann ist $g(x) = \frac{b}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$ die implizit definierte Funktion $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Es gilt

$$f(x, g(x)) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1}\left(\frac{b}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)\right) = b$$

beliebiges $m \in \mathbb{N}$ f linear heißt

$$f(x,y) = \underbrace{A}_{m \times (n+m)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underset{m\times n}{B} \underset{n}{x} + \underset{m \times m}{C} \underset{m}{y}$$

mit $A = (B \sqcup C)$ wobei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Zu lösen ist $Bx + Cy = b$ nach y. Ist C invertierbar, so ist $y = C^{-1}(b - Bx)$ die Lösung

Die Funktion $g(x) = C^{-1}(b - Bx) = C^{-1}b - C^{-1}Bx$ ist dadurch implizit definiert. Es gilt

$$f(x, g(x)) = Bx + CC^{-1}(b - Bx) = b$$

$$D_g(x) = -C^{-1}B = -\underbrace{\left(\partial_y f(x, g(x))\right)}_{m \times m}^{-1} \underbrace{\partial_x f(x, g(x))}_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$(x,y) \mapsto f(x,y)$. $\partial_y f(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0)$

---

77. $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\bar{x}) = 0$, $\partial_j f(\bar{x}) \neq 0$ $j = 1, \dots, n$

$\boxed{\text{Sei } n \geq 2}$

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = (-1)^n$$

Satz über implizite Funktionen: Die Gleichung $f(x) = 0$ lässt sich lokal in $\bar{x}$ nach jeder der n Variablen auflösen.

d.h. es gibt Funktionen $\tilde{x}_j : U_j \to \mathbb{R}$, $U_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$, so dass

$$f(x_1, \dots, x_{j-1}, \tilde{x}_j(\hat{x}), x_{j+1}, \dots, x_n) = 0,$$

wobei $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\tilde{x}_j(\hat{\bar{x}}) = \bar{x}_j$.

$\tilde{x}_j$ stetig diffbar mit

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{x}_j (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = -\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)}_{\partial_j f(x)}\Big)^{-1} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)}_{\partial_k f(x)}$$

für $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$.

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \tilde{x}_i (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial_{i+1} f(x)}{\partial_i f(x)} = (-1)^n$$

wobei x_{n+1} mit x_1 identifiziert wird

Bemerkung: (a) Thermodynamik

Zustandsgleichung: $f(p, V, T) = 0$

z.B. $f(p, V, T) = pV - RT$

Im obigen Sinne gilt dann z.B.

$$\frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1$$

(b) Mnemotechnik: $f(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad f(a,b,c,d,e) = 0$

Schreibweise

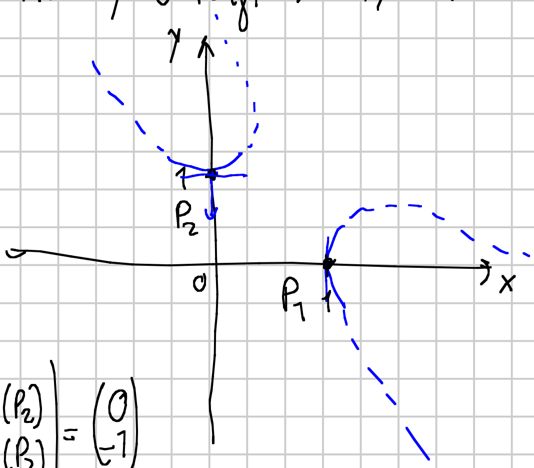
$$\partial_{(a,c,d)} f = \frac{\partial f}{\partial(a,c,d)} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a,c,d)} = \frac{\partial \binom{f_1}{f_2}}{\partial(a,c,d)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_a f_1 & \partial_c f_1 & \partial_d f_1 \\ \partial_a f_2 & \partial_c f_2 & \partial_d f_2 \end{pmatrix}}_{2 \times 3}$$

Auflösen nach zwei Variablen z.B. b, e ergibt lokal die Funktionen $\tilde{b}(a,c,d)$, $\tilde{e}(a,c,d)$ und es gilt

$$\underbrace{\frac{\partial(\tilde{b},\tilde{e})}{\partial(a,c,d)}}_{2\times 3}\Bigg|_{(a^*,c^*,d^*)} = -\Bigg(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial(b,e)}}_{\substack{2\times 2\\ \uparrow \\ \text{invertierbar}}}\Bigg)^{-1} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial(a,c,d)}}_{2\times 3}\Bigg|_{\substack{b=\tilde{b}(a^*,c^*,d^*),\, e=\tilde{e}(a^*,c^*,d^*)\\ a^*,c^*,d^*}}$$

72 (a) $g(x,y)=e^{xy}-x-y$. $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $N=g^{-1}(\{0\})=\{e^{xy}=x+y\}\subset\mathbb{R}^2$.

- N ist symmetrisch bzgl. Diagonale $\{x=y\}$, das bedeutet
$$(x,y)\in N \iff (y,x)\in N$$
- Schnittpunkte mit x,y-Achsen: Aus $y=0$ folgt $x=1$, d.h.
$$P_1=(1,0),\ P_2=(0,1)\in N$$



$$\operatorname{grad} g(x,y)=\begin{pmatrix} ye^{xy}-1\\ xe^{xy}-1\end{pmatrix}$$

also $\operatorname{grad} g(P_1)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\operatorname{grad} g(P_2)=\begin{pmatrix}\partial_x g(P_2)\\ \partial_y g(P_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

Implizite Funktion $\tilde{y}(x)$ bei P_2 mit $\tilde{y}(0)=1$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\quad \tilde{y}'(0)=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(P_2)}{\frac{\partial g}{\partial y}(P_2)}=-\frac{\partial_x g(P_2)}{\partial_y g(P_2)}=0$$

$$\tilde{y}''(x)=\frac{d}{dx}\tilde{y}'(x)=-\overbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\frac{\partial_x g(x,\tilde{y}(x))}{\partial_y g(x,\tilde{y}(x))}}_{=:h(x)}}^{h'(x)}=-\frac{\partial_x^2 g(x,\tilde{y}(x))+\partial_y\partial_x g(x,\tilde{y}(x))\,\tilde{y}'(x)}{\partial_y g(x,\tilde{y}(x))}+\partial_x g(x,\tilde{y}(x))\times \cdots$$

Somit
$$\tilde{y}''(0) = -\frac{\partial_x^2 g(0,1) + 0}{\partial_y g(0,1)} = 1, \text{ da } \partial_x^2 g(x,y) = y^2 e^{xy}.$$
Bis zur zweiten Ordnung ist $\tilde{y}(x) = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$.

(b) Extremwerte von $F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ unter der NB $g(x,y)=0$

$\operatorname{grad} F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Lagrange-Multiplikator führt auf die Gleichungen $\operatorname{grad} F(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$, $g(x,y)=0$

also $x = \lambda(ye^{xy}-1)$, $y = \lambda(xe^{xy}-1)$, $e^{xy} = x+y$

für die Unbek. x, y, λ.. Als Lösungen findet man

$(x,y,\lambda) = (1,0,-1)$ also P_1 und

$(x,y,\lambda) = (0,1,-1)$ also P_2.