Mathematik 2 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 10

Notiztitel 28.06.2010

63. $x \in \mathbb{R}^n \quad k \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}^k} \underbrace{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}_{\prod_{j=1}^{k} x_{i_j}} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = k} \frac{k!}{\nu!} x^\nu$$

Indextupel: $i = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$

Multiindex: $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$|\nu| = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \quad , \quad \nu! = \prod_{i=1}^{n} \nu_i!$$

$$x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} \quad , \quad \partial^\nu = \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n}$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad , \quad (x_1 + x_2)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_1^j x_2^{k-j}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k = \left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}\right) \cdots \left(\sum_{i_k=1}^{n} x_{i_k}\right) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

$$\sum_{i \in \{1,\dots,n\}^k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \overset{!}{=} \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = k} \frac{k!}{\nu!} x^\nu$$

Zum Indextupel $i = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ definiert man den Multiindex $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ durch

$$\nu_j = \left|\{\mu : i_\mu = j\}\right| \qquad j = 1, \dots, n$$

Zu $i = (1, 3, 2, 1, 2, 5, 2)$ gehört

$$\nu = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \end{array}$$
$$\nu = (2, 3, 1, 0, 1)$$

Es folgt, dass $|\nu| = k$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_k} = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$

Zu $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es genau $\frac{k!}{\nu_1! \cdots \nu_n!}$ Indextupel, die zu dem Multiindex ν führen.

Sei $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ das zum Multiindex ν gehört

Zu jeder Permutation $\pi \in S_k$ gehört $(i_{\pi(1)}, \dots i_{\pi(k)})$ auch zu ν.

Dies $k!$ Permutationen sind nicht alle verschieden. Werden nur die ν_1 Indizes permutiert, die den Wert 1 haben, so bleibt der Multiindex unverändert. $\#$ Indextupel $= \frac{k!}{\nu_1! \nu_2! \cdots \nu_n!} = \frac{k!}{\nu!}$

$$\sum_{i \in \{1, \dots, n\}^k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = k} \frac{k!}{\nu!} x^\nu$$

hat links und rechts genau die gleichen Terme.

64. (a) $f(x) = \frac{1 + x^2 - 2y^2}{\sqrt{4 + xy}}$ Taylorentwicklung in $(0,0)$

Bem: Taylorentwicklung von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt (x_0, y_0) bis zur 2. Ordnung

$$f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = f(x_0, y_0) + \alpha \partial_x f(x_0, y_0) + \beta \partial_y f(x_0, y_0)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2} \partial_{xx} f(x_0, y_0) + \frac{\beta^2}{2} \partial_{yy} f(x_0, y_0) + \alpha\beta\, \partial_{xy} f(x_0, y_0) + R_3(\alpha, \beta)$$

Es ist $\frac{1}{\sqrt{4 + xy}} = \frac{1}{2} \Big(1 + \underbrace{\frac{xy}{4}}_{w}\Big)^{-1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{xy}{4} + O(x^2 y^2)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{Kgzradius } 1 \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$$
$$= 1 + \alpha x + O(x^2)$$

$$f(x,y) = (1+x^2-2y^2)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{xy}{16} + \text{Terme höherer Ordnung}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{xy}{16} - y^2 + \text{T.h.O.}$$

$$+ R_3(x,y)$$

(b) $f(x,y) = x^2 \sin\frac{xy}{2}$ Entwicklungspunkt $(1,\pi)$

Wir schreiben

$$f(1+\alpha, \pi+\beta) = (1+\alpha)^3 \sin\frac{(1+\alpha)(\pi+\beta)}{2} = (1+2\alpha+\alpha^2)\times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{\alpha\beta}{2}\right) =$$

$$= (1+2\alpha+\alpha^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{\alpha\beta}{2}\right)$$

$$= (1+2\alpha+\alpha^2)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{\alpha\beta}{2}\right)^2 + \text{T.h.O}\right)$$

$$= (1+2\alpha+\alpha^2)\left(1 - \frac{\pi^2}{8}\alpha^2 - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{\pi}{4}\alpha\beta + \text{T.h.O}\right)$$

$$= \underbrace{1 + 2\alpha + \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)\alpha^2 - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{\pi}{4}\alpha\beta}_{\text{Taylorpolynom 2. Ordnung}} + \text{T.h.O.}$$

65 (a) $M \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, M^TM invertierbar, $y \in \mathbb{R}^n$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(\alpha) = \|y - M\alpha\|_2^2$ Minimum

$(M^TM)^T = M^T(M^T)^T = M^TM$

$$F(\alpha) = (M\alpha - y)^T(M\alpha - y) = (\alpha^TM^T - y^T)(M\alpha - y) =$$

$$\alpha^T(M^TM)\alpha - y^TM\alpha - \alpha^TM^Ty + y^Ty = \alpha^T(M^TM)\alpha - 2y^TM\alpha + y^Ty$$

$$0 \overset{!}{=} \underbrace{\operatorname{grad} F(\alpha)}_{\mathbb{R}^2} = 2M^TM\alpha - 2(y^TM)^T = 2(M^TM)\alpha - 2M^Ty$$ (vorl)

α stationärer Punkt $\Leftrightarrow$ $(M^TM)\alpha = M^Ty \in \mathbb{R}^2$

D.h. $\alpha^* = (M^TM)^{-1}M^Ty$ ist einziger stationärer Punkt

$H_F(\alpha) = 2M^TM$. Für $\alpha \in \mathbb{R}^2$ ist $\langle \alpha, M^TM\alpha\rangle = \langle M\alpha, M\alpha\rangle = \|M\alpha\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ M^TM positiv semidefinit. Wäre ein EW gleich 0, so wäre M^TM nicht invertierbar. Also ist M^TM positiv definit $\Rightarrow$ α^* ist lok. Minimum

α^* ist sogar einziges absolutes Minimum (NA)

$F(x) = Ax = a \cdot x \quad A \in \mathbb{R}^{1\times n} \qquad a = A^T \in \mathbb{R}^n$

$\operatorname{grad} F(x) = a = A^T$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad A = A^T$

$F(x) = \langle x, Ax\rangle = x^TAx = \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j$

$\operatorname{grad} F(x) = Ax + (x^TA)^T = Ax + A^Tx = 2Ax$