# Mathematik 2 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 9

Notiztitel 21.06.2010

IKOM:

22.6.2010 Di Gruppe 8 10-12 MW1701 → MW2235

Gruppe 3 12-14 MW1701 → MW3340

23.6.2010 Mi Gruppe 5 8:30-10:00 MW2050 → MW1250

Gruppe 7 10:00-11:45 MW1050 →

MI 00.08.038

---

Bitte bei „Übungen zur Analysis 2 - Mathematik für Physiker 3" anmelden.

---

56. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

(a) f ist partiell diffbar:

Für $(x,y) \neq 0$: $\partial_1 f(x,y) = y \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\partial_2 f(x,y) = x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Wegen $f(x,0) = 0$, $f(0,y) = 0$, $x,y \in \mathbb{R}$

$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$, $\partial_2 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$

Bem: $(x,y) \mapsto f(x,y)$. $\partial_1 f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (\partial_1 f)(x,y) = \partial_x f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

(b) $f$ ist unstetig bei $0$: Sei $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to 0$.

Dann ist $f(x_n, y_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

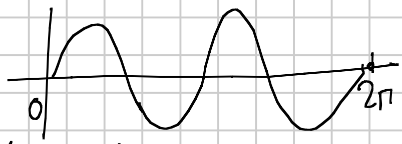
$\lim\limits_{y \to 0} \partial_x f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^3}{y^4}$ nicht def, $\lim\limits_{x \to 0} \partial_y f(x,0)$ ist nicht def

$\Rightarrow \partial_x f, \partial_y f$ nicht stetig bei $0$

(c) $\phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

$\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = f \circ \phi\,(r,\varphi)$

$\tilde{f}(r,\varphi) = \dfrac{r^2 \cos\varphi \sin\varphi}{r^2} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$




$\operatorname{grad} \tilde{f}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{f} \\ \partial_2 \tilde{f} \end{pmatrix}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_r \tilde{f} \\ \partial_\varphi \tilde{f} \end{pmatrix}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2\varphi \end{pmatrix}$ $\square$

57. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $C^1$

(a) Ist $f$ $C^1$, dann gilt

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = (\partial_{\dot\gamma(t)} f)(\gamma(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle.$$

Bew: OBdA bei $t = 0$, und sei $\gamma(0) = (0,0)$.

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma(h)) - f(\gamma(0))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\gamma_1(h), \gamma_2(h)) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma_1(h),\gamma_2(h)) - f(\gamma_1(h),0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(\gamma_1(h),0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{F_h(h) - F_h(0)}{h} + \partial_1 f(0,0)\cdot\dot\gamma_1(0)$$

$(h,r) \mapsto F_h(r) = f(\gamma_1(h), \gamma_2(r))$ | $g \circ \gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = f(x,0)$

Betrachte $\frac{F_h(r) - F_h(0)}{r} = F_h'(\xi) = \partial_2 f(\gamma_1(h), \gamma_2(\xi)) \cdot \dot{\gamma}_2(\xi)$

wobei $|\xi| < |r|$

Da $\partial_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig ist und $\xi = \xi(h,r)$ $|\xi(h,r)| < |r|$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \xi(h,h) = 0$

$\lim_{h\to 0} \frac{F_h(h) - F_h(0)}{h} = \lim_{h\to 0} F_h'(\xi(h,h)) = \lim_{h \to 0} \partial_2 f(\gamma_1(h), \gamma_2(\xi(h,h))) \times$
$\times \dot{\gamma}_2(\xi(h,h))$

$= \partial_2 f(0,0)\, \dot{\gamma}_2(0)$

Insgesamt:

$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \partial_1 f(0,0)\, \dot{\gamma}_1(0) + \partial_2 f(0,0)\, \dot{\gamma}_2(0) = \langle \operatorname{grad} f(0,0), \dot{\gamma}(0) \rangle$

---

$\partial_{\dot{\gamma}(t)} f(\gamma(t)) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(\gamma(t) + h\dot{\gamma}(t)) - f(\gamma(t))}{h} =$

$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$\tilde{\gamma}(t+h) := \gamma(t) + h\dot{\gamma}(t)$, $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\gamma}(t)$ $\quad \lim_{h\to 0} \frac{f(\tilde{\gamma}(t+h)) - f(\tilde{\gamma}(t))}{h} =$

$\frac{d}{dt}(f \circ \tilde{\gamma})(t) = \langle \operatorname{grad} f(\tilde{\gamma}(t)), \dot{\tilde{\gamma}}(t) \rangle = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$ ■

(b) $f(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$

$|f(x,y)|$

Polarkoordinaten:

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi) = r\cos 3\varphi$$

$f$ ist stetig für $(x,y) \neq 0$. Für $(x,y) = (0,0)$:

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$$ . d.h. $f$ ist Lipschitzstetig bei $(x,y) = 0$

partielle Ableitungen existieren für $(x,y) \neq 0$. Im Nullpunkt

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

aber für $\gamma(t) = (t,t)$

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt} \left.\frac{t^3 - 3t\cdot t^2}{2t^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(-t)\right|_{t=0} = -1$$

$$\langle \operatorname{grad} f(0), \dot{\gamma}(0)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1 \neq -1$$

58 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $C^2$

$$\nabla = \begin{pmatrix}\partial_1\\\partial_2\\\partial_3\end{pmatrix} : C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \quad \nabla f := \operatorname{grad} f$$

$$\nabla\cdot v := \operatorname{div} v, \quad \nabla \times v = \begin{pmatrix}\partial_1\\\partial_2\\\partial_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \operatorname{rot} v$$

(a) $$J_f(x) = \left(\partial_1 f(x) \quad \partial_2 f(x) \quad \partial_3 f(x)\right) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

$$\operatorname{grad} f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^3}(x) = J_f(x)^T$$

$v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{tr} J_v(x) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 & \partial_3 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 & \partial_3 v_2 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & \partial_3 v_3 \end{pmatrix}(x) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} \operatorname{grad} v_1(x)^T \\ \operatorname{grad} v_2(x)^T \\ \operatorname{grad} v_3(x)^T \end{pmatrix} =$$

$$= \partial_1 v_1(x) + \partial_2 v_2(x) + \partial_3 v_3(x) = \operatorname{div} v(x) = \nabla \cdot v(x)$$

$$(\nabla \times v(x)) \times w = \left(J_v(x) - J_v(x)^T\right) w$$

...