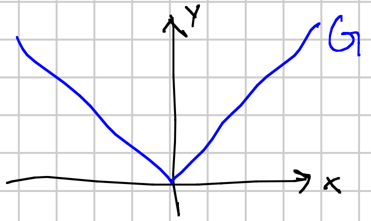
Mathematik 2 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 8

Notiztitel 14.06.2010

49. Sei $G = \{ (s, |s|) : s \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$



$\mathbb{R} \ni s \mapsto (s, |s|) \in \mathbb{R}^2$

(a) $f: \mathbb{R} \to G \quad t \mapsto (t^3, |t^3|)$, $f'(t) = (3t^2, 3\,\mathrm{sgn}(t)\, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$
stetig

(b) Es gibt keine Reguläre Kurve mit Spur G

Bew: Ann: Sei $f: I \to G$ reguläre Kurve. OBdA sei $f(0) = (0,0)$.

Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = f_1(t)$. Dann ist $f_2(t) = |g(t)|$.

d.h. $f(t) = (g(t), |g(t)|)$

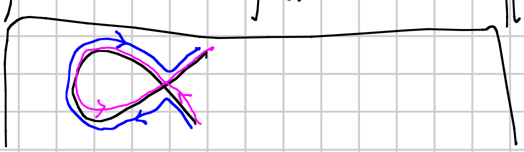
Fall 1: $g'(0) \neq 0$. Dann ist $t \mapsto |g(t)|$ bei $t=0$ nicht diffbar
Widerspruch zu f stetig diffbar.

Begr: OE sei $g'(0) > 0$. Dann gibt es $\epsilon >$ mit $g(t) > 0$ für $t \in]0, \epsilon[$ und $g(t) < 0$ für $t \in]-\epsilon, 0[$. Somit ist

$$\lim_{t \to 0+} \frac{|g(t)| - |g(0)|}{t} = g'(0). \quad \lim_{t \to 0-} \frac{|g(t)| - 0}{t} = \lim_{t \to 0-} \frac{-g(t)}{t} = -g'(0) \neq g'(0)$$

Fall 2: $g'(0) = 0$: Dann ist $|g|'(0) = 0$. D.h. $f'(0) = (0,0)$. $t = 0$ ist singulärer Punkt. Widerspruch zu f regulär

(c) $\tilde{f}: t \mapsto \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{|t|}{\sqrt{2}} \right)$ hat als Spur G und $\|\tilde{f}'(t)\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \mathrm{sgn}(t)) \right\| = 1$
für $t \neq 0$



50. reguläre Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Krümmung

$$\varkappa(t) = \frac{\|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3}$$

Krümmung im $\mathbb{R}^n$?

(a) Krümmung ist C^2-reparametrisierungsinvariant.

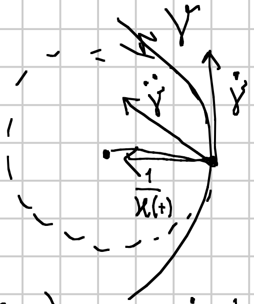
Bew: $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar, $\tilde\gamma = \gamma \circ t$.

$$\tilde\gamma'(s) \left(= \frac{d}{ds} \tilde\gamma(s) \right) = \frac{d}{ds} \gamma(t(s)) = \dot\gamma(t(s)) \cdot t'(s)$$

$$\tilde\gamma''(s) = \ddot\gamma(t(s)) \cdot (t'(s))^2 + \dot\gamma(t(s)) \cdot t''(s)$$

$$\tilde\varkappa(s) = \frac{\|\tilde\gamma'(s) \times \tilde\gamma''(s)\|}{\|\tilde\gamma'(s)\|^3} = \frac{\|(\dot\gamma(t(s)) \cdot t'(s)) \times (\ddot\gamma(t(s)) \cdot (t'(s))^2 + \dot\gamma(t(s))\, t''(s))\|}{\|\dot\gamma(t(s))\, t'(s)\|^3}$$

$$= \frac{\|\dot\gamma(t(s)) \times \ddot\gamma(t(s))\|}{\|\dot\gamma(t(s))\|^3} = \varkappa(t(s)) = (\varkappa \circ t)(s)$$



(b) Kreiskurve: $x(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$

$\dot x(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0)$. $\ddot x(t) = (-r\cos t, -r\sin t, 0)$

$\dot x(t) \times \ddot x(t) = (0, 0, r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t) = (0, 0, r^2)$. Somit

$$\varkappa(t) = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

(c) Klothoide
$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{s^2}{2}\right) ds , \int_0^t \sin\left(\frac{s^2}{2}\right) ds , 0 \right)$$
$$\dot\gamma(t) = \left(\cos\frac{t^2}{2}, \sin\frac{t^2}{2}, 0\right), \quad \|\dot\gamma(t)\| = 1$$
$$\ddot\gamma(t) = \left(-t\sin\frac{t^2}{2}, t\cos\frac{t^2}{2}, 0\right)$$
$\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t) = (0,0,t)$. Also ist $\kappa(t) = t = L(t)$

51. $I \subset \mathbb{R}$ bel. Intervall $f : I \to \mathbb{R}^n$ Kurve.
$$L(f) := \sup_{[a,b] \subset I} L\left(f|_{[a,b]}\right) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} = [0,\infty]$$
ist die Bogenlänge von f. Ist $L(f) < \infty$ so heißt f rektifizierbar.

(a) f stetig diffbar. Dann ist
$$L(f) = \int_I \|\dot f(t)\| \, dt \quad \text{(uneigentl. Integral)}$$

Bew: $I^2 \ni (a,b) \mapsto L\left(f|_{[a,b]}\right) \in \mathbb{R}_0^+$ ist monoton fallend in a und monoton wachsend in b.

Begr: $b' > b$ zu jeder Zerlegung Z von $[a,b]$, $Z = (t_0, t_1, \dots, t_n)$, wobei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, gibt es Zerlegung Z' von $[a,b']$, $Z' = (t_0, t_1, \dots, t_n, b')$, wobei

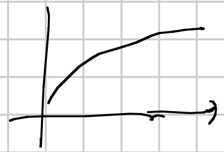
$$L(f,Z) \leq L(f,Z')$$

$\Downarrow$ sup

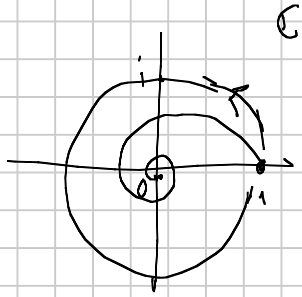
$$L(f|_{[a,b]}) \leq L(f|_{[a,b']})$$

Ist z.B. $I =]c,d[$, $-\infty \leq c < d \leq +\infty$, so gilt

$$L(f) = \lim_{a \searrow c} \lim_{b \nearrow d} \underbrace{\int_a^b \|\dot{f}(t)\| \, dt}_{b \mapsto L(f|_{[a,b]})} = \int_c^d \|\dot{f}(t)\| \, dt$$



(b) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{zt}$. $z \in \mathbb{C}$



$$|f'(t)| = |z e^{zt}| = |z| e^{\mathrm{Re}\, z\, t}$$

$$L(f) = \int_0^\infty |z| e^{\mathrm{Re}\, z\, t} \, dt = \begin{cases} \frac{|z|}{\mathrm{Re}\, z} \lim_{r \to \infty} \left[e^{\mathrm{Re}\, z\, t} \right]_0^r = -\frac{|z|}{\mathrm{Re}\, z} & \text{für } \mathrm{Re}\, z < 0 \\ \infty & \text{für } \mathrm{Re}\, z \geq 0 \end{cases}$$