# Mathematik 2 für Physik (Analysis 2)  Zentralübung 4

Notiztitel 17.05.2010

**A23.** $(M,d)$ metr. Raum, $(a_n)$ in $M$

Es ist äquivalent


(i) $(a_n)$ ist CF-Folge

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}\{a_k : k \geq n\} = 0$


(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} d(a_n, a_k) = 0$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) $(a_n)$ ist CF. Zu $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ s.d. f.a. $n,m \geq N$ gilt $d(a_n, a_m) < \epsilon$. Somit ist

$\operatorname{diam}\{a_k : k \geq N\} = \sup\{d(a_n,a_m) : n,m \geq N\} \leq \epsilon$.

$n \mapsto \operatorname{diam}\{a_k : k\geq n\}$ ist monoton fallend $\Rightarrow \operatorname{diam}\{a_k : k \geq n\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Folgt aus $\sup\limits_{k\geq n} d(a_n, a_k) \leq \operatorname{diam}\{a_k : k \geq n\}$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\epsilon > 0$. Nach (iii) gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{k\geq n} d(a_n,a_k) < \epsilon$ für $n \geq N$ $\Rightarrow \forall k,n \geq N : d(a_n,a_k) < \epsilon$, d.h. $(a_n)$ ist CF $\boxtimes$

**24.** (a) $(M,d)$, $(N,d')$ metr. Räume. $f: M \to N$ stetig

Beh: $G_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset M \times N$ ist abg. bzgl. Produktmetrik

Bew: Sei $(x_n, y_n)$ Folge in $G_f$ mit $(x_n, y_n) \to (x,y) \in M \times N$

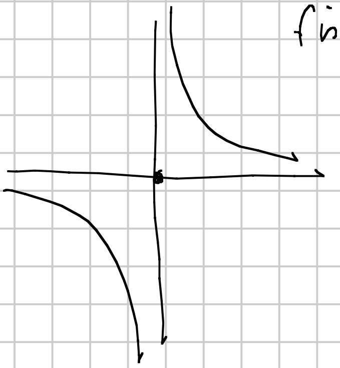
z.z. $(x,y) \in G_f$

Aus $(x_n, y_n) \in G_f$ folgt $y_n = f(x_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$(x,y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} f(x_n)\right) = \left(x, f(x)\right) \in G_f$$

$\Rightarrow$ $y = f(x)$, bzw. $(x,y) \in G_f$.

(b) Gegenbeispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$



$f$ ist unstetig, $G_f$ ist abgeschlossen, da

$f_\pm := f|_{\mathbb{R}^\pm}$ stetig ist, d.h.

$$G_f = \underbrace{G_{f+}}_{\text{abg.}} \cup \underbrace{G_{f-}}_{\text{abg.}} \cup \{(0,0)\}$$

---

25. $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ a \in B(\mathbb{N}) : \|a\|_2 < \infty \right\}$; $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$

(a) $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ ist normierter Raum

(b) $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ ist Banachraum

$a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\quad a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ (= (a_n))$

Bew (a) $\ell^2(\mathbb{N})$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, da mit $a, b \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\alpha \in \mathbb{C}$ auch $\|\alpha a\|_2 = |\alpha| \, \|a\|_2 < \infty$ und $\|a+b\|_2 \overset{(*)}{\leq} \|a\|_2 + \|b\|_2 < \infty$, denn $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2 \leq \left( \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2} \right)^2$$

$(*)$ folgt im Limes $n \to \infty$. $\quad$ ( $\ell^2(\mathbb{N})$ ist UVR

$\Delta$-Ungl. siehe oben.

Homogenität: $\|\alpha a\|_2 = |\alpha| \, \|a\|_2$ (s.a.)

Definitheit: $\|0\|_2 = 0$. Sei $a \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit $\|a\|_2 = 0$. Gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| > 0$, so wäre $\|a\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \geq |a_n|^2 > 0$ ↯. Also $a = 0$.

(b) Sei $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ CF in $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$

(i) (Punktweiser Limes) Sei $n\in\mathbb{N}$ fest. Dann gilt

$$|a_n^{(\ell)} - a_n^{(k)}| \leq \| a^{(\ell)} - a^{(k)}\|_2$$

$\Rightarrow (a_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist CF in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} a_n^{(k)} = b_n$ existiert

(ii) (der Kandidat ist $\ell^2$) z.z. $b\in\ell^2(\mathbb{N})$.

$\forall N\in\mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |a_n^{(k)}|^2 \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|a^{(k)}\|_2^2 \leq \text{const} < \infty$$

$\Rightarrow \|b_n\|_2^2 < \infty$ bzw $b\in\ell^2(\mathbb{N})$

(iii) (Konvergenz in $\ell^2$) Zu zeigen: $\|a^{(k)} - b\|_2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Sei $\epsilon > 0$. Es gibt $K\in\mathbb{N}$ s.d.f.a $k,\ell \geq K$: $\|a^{(k)} - a^{(\ell)}\|_2 < \epsilon$

bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n^{(k)} - a_n^{(\ell)}|^2 < \epsilon^2$

Für jedes $N\in\mathbb{N}$ gilt

$$\epsilon^2 \geq \lim_{\ell\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |a_n^{(k)} - a_n^{(\ell)}|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n^{(k)} - b_n|^2$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n^{(k)} - b_n|^2 \leq \epsilon^2$ bzw. $\|a^{(k)} - b\|_2 < \epsilon$

$\Rightarrow a^{(k)} \to b$ in der $\|\cdot\|_2$-Norm

$\Rightarrow$ $\ell^2(\mathbb{N})$ ist Banachraum

Bem:
- $\ell^2(M)$ ist Banachraum falls $M$ abzählbar (z.B. $\mathbb{Z}, \mathbb{N}^n$)
- $\ell^p(\mathbb{N})$ ist Banachraum mit $\|\cdot\|_p$, $p\in[1,\infty]$
- $\ell^2(\mathbb{N})$ ist mit Skalarprodukt $\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} b_n$ ein Hilbertraum. $\|a\|_2 = \sqrt{\langle a,a\rangle}$

26. $(M,d)$ metrischer Raum $CM$ Menge alle CF in $M$

(a) $(a_n) \sim (b_n) :\Leftrightarrow d(a_n, b_n) \to 0$ für $n \to \infty$ ist Äquivalenzrelation auf $CM$

Bew: reflexiv: $d(a_n, a_n) = 0$, symmetrisch: $d$ ist symmetrisch.

transitiv $(a_n) \sim (b_n), (b_n) \sim (c_n) \Rightarrow d(a_n, c_n) \leq \underbrace{d(a_n, b_n)}_{\downarrow 0} + \underbrace{d(b_n, c_n)}_{\downarrow 0} \to 0$

$\Rightarrow (a_n) \sim (c_n)$

(b) $\hat{M} := CM/_\sim$ $\quad i : M \ni a \mapsto [(a)_{n\in\mathbb{N}}] \in \hat{M}$ ist injektiv

$\boxed{\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p}$ $\quad \{[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] : (a_n) \in CM\}$

$i(a) = \ldots \quad i(b)$

Bew: $a, b \in M$ mit $[(a)_{n\in\mathbb{N}}] = [(b)_{n\in\mathbb{N}}]$

Es gilt $a = \lim_{n\to\infty} a = \lim_{n\to\infty} b = b$, also $a = b$

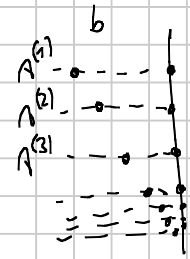
Ist $M$ vollständig, so ist $i$ bijektiv

Bew: $[(a_n)] \in \hat{M}$ Dann ist $(a_n)$ CF in $M$. Es gibt also $a \in M$ mit $a_n \to a$. Offenbar ist $i(a) = [(a_n)]$, also ist $i$ bijektiv

(c) Pseudometrik auf $CM$

(d) z.z. dass $(\hat{M}, \hat{d})$ Metrischer Raum ist.

z.z $(\hat{M}, \hat{d})$ ist vollst. (Wähle CF in $\hat{M}$ $A^{(k)}$




$(b_n)$ ist CF in $M$ und $\hat{d}(A^{(k)}, b) \to 0$ $k \to \infty$