Mathematik 2 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 3

Notiztitel 10.05.2010

A15 $\mathbb{R}^2$ $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$,

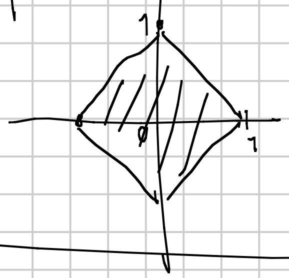
$U_1(0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p < 1 \}$

$|x|^p + |y|^p < 1$

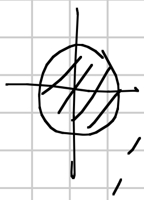
$f_\pm(x) = \pm \sqrt[p]{1 - |x|^p}$ für $x \in [-1,1]$

$U_1(0) = \{ (x,y) : x \in]-1,1[, y \in]f_-(x), f_+(x)[$

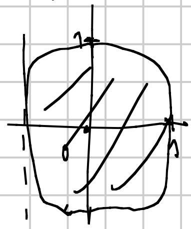
$p = 1$



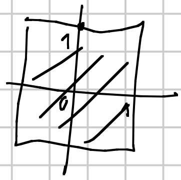
$p = 2$



$p = 4$



$p = \infty$



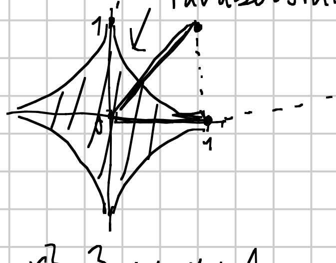
$p = \frac{1}{2}$: $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1$

$x,y > 0$: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

$x,y < 1$

$y = (1 - \sqrt{x})^2$

Parabelstück



$x^2, y^2, xy, x, y, 1$

Δ-Ungl verletzt:

$(x,y) = (1,1)$

$(0,0)$

$(1,0)$

$\|(1,0)\|_{1/2} = 1$

$\|(1,1)\|_{1/2} = \sqrt[1/2]{1^{1/2} + 1^{1/2}} = 4$

$\|(0,1)\|_{1/2} = 1$, $1 + 1 < 4$

A16 $(X, d^X), (Y, d^Y)$ metr. Räume, $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$

$$d((x,y),(x',y')) = \max\{d^X(x,x'), d^Y(y,y')\}$$

$(X \times Y, d)$ ist metrischer Raum.

(i) $d \geq 0$, $d((x,y),(x,y)) = 0$

$$d((x,y),(x',y')) = 0 \Rightarrow d^X(x,x') = 0, d^Y(y,y') = 0 \Rightarrow x = x', y = y' \Rightarrow (x,y) = (x',y')$$

(ii) Symmetrie ist offensichtlich

(iii) $d((x,y),(x'',y'')) = \max\{d^X(x,x''), d^Y(y,y'')\}$

$$\leq \max\{d^X(x,x') + d(x',x''), d^Y(y,y') + d^Y(y',y'')\}$$

$$\leq \max\{\max\{d^X(x,x'), d^Y(y,y')\} + d(x',x''), \max\{d^X(x,x'), d^Y(y,y')\} + d^Y(y',y'')\}$$

$$\leq \max\{\max\{d^X(x,x'), d^Y(y,y')\} + \max\{d(x',x''), d^Y(y',y'')\}\}$$

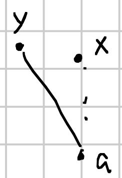
$$\leq d((x,y),(x',y')) + d((x',y'),(x'',y'')) \quad \boxtimes$$

Anwendung: $d^X : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig bzgl. $(X \times X, d)$

---

17 (X, d) metr. Raum, $a \in X$, $r > 0$

(a) „Abgeschlossene Kugel" $\tilde{U}_r(a) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$ ist abgeschlossen



Bew: Sei $x \in X \setminus \tilde{U}_r(a)$. Also $d(x,a) > r$

Sei $\epsilon = d(x,a) - r > 0$. ZZ. $U_\epsilon(x) \subset X \setminus \tilde{U}_r(a)$

Sei $y \in U_\epsilon(x)$, d.h. $d(y,x) < \epsilon$. $d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y)$

$$> d(x,a) - \epsilon = r. \Rightarrow y \in X \setminus \tilde{U}_r(a)$$

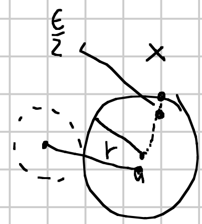
⇒ $X \setminus \tilde{U}_r(a)$ offen ⇒ $\tilde{U}_r(a)$ abgeschlossen.

(b) $S = \{x \in X : d(x,a) = r\}$ ist abgeschlossen

Bew: $S = X \setminus \Big(\underbrace{\{x \in X : d(x,a) < r\}}_{\text{offen lt Vorl.}} \cup \underbrace{\{x \in X : d(x,a) > r\}}_{\text{offen vg (a)}} \Big)$ ist abg.

(c) X normierter Raum mit induzierter Metrik, Dann ist

$$S = \partial U_r(a) = \partial \tilde{U}_r(a)$$



Beweis: $S = \partial U_r(a)$

"$\subset$" Sei $x \in S$, also $\|x-a\| = r$. Sei $\epsilon > 0$

Dann ist $x \in U_\epsilon(x) \cap (X \setminus U_r(a)) \neq \emptyset$ und

$\left(1 - \frac{\epsilon}{2r}\right)(x-a) + a \in U_\epsilon(x) \cap U_r(a) \neq \emptyset$ ⇒ $x \in \partial U_r(a)$

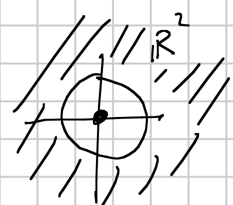
"$\supset$" Sei $x \in \partial U_r(a)$

Annahme: $\|x-a\| > r$. Dann ist x kein Berührpunkt von $U_r(a)$,
da $U_\epsilon(x) \cap U_r(a) = \emptyset$ falls $\epsilon = \|x-a\| - r$ ↯

Annahme: $\|x-a\| < r$. ⇒ $x \in U_r(a)$ ⇒ x innerer Punkt von $U_r(a)$
⇒ x ist kein Randpunkt von $U_r(a)$ ↯

⇒ $\|x-a\| = r$ ⇒ $x \in S$

$S = \partial \tilde{U}_r(a)$ geht analog.



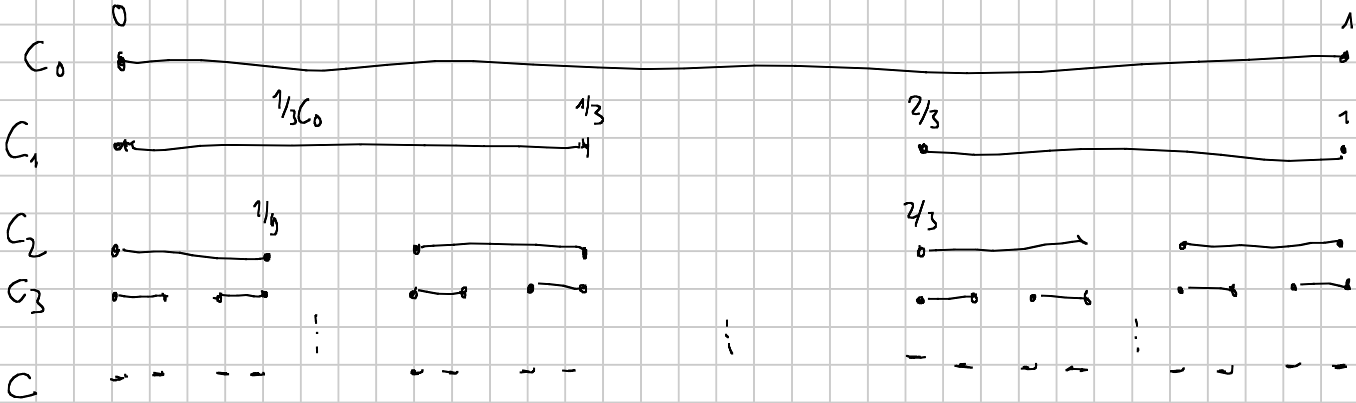
(d) $\partial U_r(a) \subsetneq S$: Bsp: $a = 0 \in \mathbb{R}^2$, $r = 1$

$(\mathbb{R}^2 \setminus U_1(0)) \cup \{0\}$ $\quad U_1(0) = \{0\}$ $\quad \partial U_1(0) = \emptyset$, $S \neq \emptyset$

Auf $\tilde{U}_1(0)$ mit induzierter Metrik von $\mathbb{R}^2$ ⇒ $\partial \tilde{U}_1(0) = \emptyset$, $S \neq \emptyset$.

(X, d) metr. Raum $\quad X, \emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

18. $C_0=[0,1]$, $C_{n+1}=\left(\frac{1}{3}C_n\right)\cup\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n\right)$, $C:=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$.



$A\subset B\subset\mathbb{R}$. , $\alpha,\beta>0$: $\alpha+\beta A=\{\alpha+\beta x : x\in A\}$. Es gilt

$\overline{\alpha+\beta A}=\alpha+\beta\overline{A}$, analog $^\circ$, ∂ und $\alpha+\beta A\subset\alpha+\beta B$.

(a) Beh: $C_{n+1}\subset C_n\ \forall n\in\mathbb{N}_0$

"$n=0$": $C_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]\subset C_0$

"$n-1\to n$" $C_{n+1}=\left(\frac{1}{3}C_n\right)\cup\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n\right)\overset{\text{I.V.}}{\subset}\left(\frac{1}{3}C_{n-1}\right)\cup\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_{n-1}\right)=C_n$

(b) C_0 abg., C_n abg $\Rightarrow$ C_{n+1} abg. $\Rightarrow$ $C=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_0}C_n$ ist abgeschl.

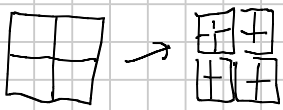
$C\neq\emptyset$, da $0,1\in C_n\ \forall n\in\mathbb{N}_0$. $\frac{1}{3},\frac{2}{3}\in C_n\ n\in\mathbb{N}\Rightarrow 0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\in C$

Beh: $C=\left(\frac{1}{3}C\right)\cup\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C\right)$

Bew: $x\in C\Leftrightarrow x\in C_n$ f.a. $n\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow \overbrace{x\in\frac{1}{3}C_{n-1}}^{\text{falls } x<1/2}\ \overbrace{\ }^{\text{f.a. } n\in\mathbb{N}}$ oder $\overbrace{x\in\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_{n-1}}^{\text{falls } x\geq 1/2}$ f.a. $n\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow x\in\frac{1}{3}C$ oder $x\in\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{3}C\right)\cup\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C\right)$

Fraktale Dimension



Verkleinerungsfaktor 2, Vervielfältigung ×4 $\quad\frac{\log 4}{\log 2}=2$

C: Verkl. 3, Vervielf. 2 $\quad$ fraktale Dimension (selbstähnliche) $\quad\frac{\log 2}{\log 3}\approx 0{,}7..$

(c) Beh: $C_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{a_{n+1}}{3^n} : a \in \{0,1\}^n \times [0,1] \right\} =: D_n$

Man zeigt $D_0 = [0,1] = C_0$ I.A.

im I.S.: $D_{n+1} = \left(\frac{1}{3} D_n\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} D_n\right)$ siehe Lösungsblatt.

$\Rightarrow$ $C_n = D_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(d) $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \ni a \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} \in C$ ist eine Bijektion (2.2)