Mathematik 2 für Physik (Analysis 2) Zentralübung 2

Notiztitel 03.05.2010

A8. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt$ ist divergent für alle $t \in \mathbb{R}$.

$\#$

$\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ikt}}_{\text{divergent}}\Big)$. Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kt = 0$ für $t \in \pi\mathbb{Z}$

Bew: Wegen 2π-Periodizität, genügt es Divergenz für $t = 2\pi y$, $y \in [0,1[$ zu zeigen.

Für $a_k = k\cdot y - [k\cdot y] \in [0,1[$ gilt $\cos kt = \cos 2\pi a_k$

(a_k) ist beschränkt, es gibt konvergente TF $a_{k_i} \to a \in [0,1]$

Zu zeigen ist, dass $a \neq \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$. Falls $a = \frac{1}{4}$ (oder $\frac{3}{4}$)

dann betrachte $a_{2k_i} \to \frac{1}{2}$. $\cos 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \cos \pi = -1 \neq 0$

Wegen Stetigkeit des Kosinus besitzt $\cos kt = \cos 2\pi a_k$ den Häufungswert $\cos 2\pi a \neq 0$.

$\boxed{\text{Falls } a_{k_i} \in [0, 1/2[\text{, gilt } 2a_{k_i} = a_{2k_i}}$ $\quad a_{2k_i}$

$a_{k_i} \to a \overset{\cos\ \text{ste}}{\Rightarrow} \cos(2\pi a_{k_i}) \to \cos 2\pi a$

A9. (a) $f_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kt \qquad g_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kt, \; r \in]-1,1[$

$$f_r(t) + i g_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{r^k e^{ikt}}_{(re^{it})^k} = \frac{1}{1-re^{it}} = \frac{1-re^{-it}}{1-2r\cos t + r^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t + r^2}}_{f_r(t)} + i \underbrace{\frac{r\sin t}{1-2r\cos t + r^2}}_{g_r(t)}$$

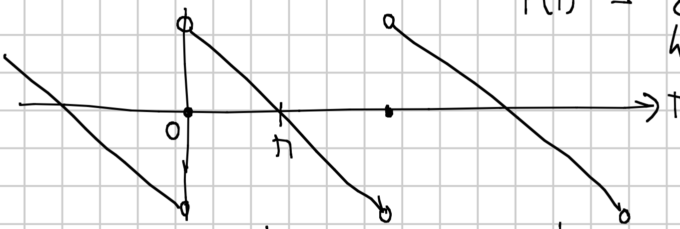
(b) $$f(t) = \lim_{r\to 1-} f_r(t) = \lim_{r\to 1-} \frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t + r^2} = \begin{cases} \frac{1-\cos t}{2-2\cos t} = \frac{1}{2}; \; t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \lim_{r\to 1-} \frac{1-r}{(1-r)^2} \to \infty, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$g(t) = \lim_{r\to 1-} g_r(t) = \lim_{r\to 1-} \frac{r\sin t}{1-2r\cos t + r^2} = \begin{cases} \frac{\sin t}{2-2\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} & \text{für } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) $$F(t) = \int_{\pi}^{t} \big(\underbrace{f(s)-1}_{-1/2}\big)\, ds = \frac{\pi - t}{2} \quad \text{für } t \in]0, 2\pi[$$

$F(t) = 0$ für $t \in 2\pi\mathbb{Z}$

$$F(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}}_{\text{Abl:}}$$



Abl: $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt$ divergent

$$G(t) = c + \int_{\pi}^{t} g(s)\, ds = c + \int_{\pi}^{t} \frac{\cos\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}}\, ds = c + \int_{\pi}^{t} \frac{d}{ds}\Big(\ln\big(\sin\tfrac{s}{2}\big)\Big)\, ds$$

$$= c + \ln \sin\frac{t}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) = \frac{\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\ .$$

Bem: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k} = -\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)$ für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$

kann man unter Ausnutzung von $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots = \ln 2$ und

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx = \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Aufintegrieren, abschätzen, $N\to\infty$.

10. $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin 2^{(k^2)}x}{2^k}$ Beh: f ist stetig, nirgends diffbar

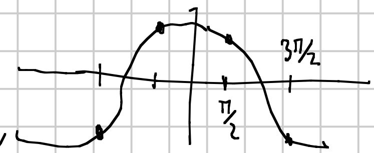
$$\left[\ \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin 2^{k^2}x}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}2^{k^2-k}\cos 2^{k^2}x\ \right]$$

Majorante $\left|\frac{\sin 2^{k^2}x}{2^k}\right| \le 2^{-k}$ ⇒ glm kgz ⇒ f stetig

[Meyberg/Vachenauer Höhere Mathematik ... II] $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} = \frac{1}{h_m}\sum_{k=0}^{m}\underbrace{2^{1-k}\sin\left(2^{k^2-1}h_m\right)\cos 2^{k^2}\left(x+\frac{h_m}{2}\right)}\geq$$

[$h_m = \frac{\pi}{2}2^{-m^2}s,\ s=\pm1,\pm3$



$k<m$: $|\,''\,| \le 2^{-m-k-1}$

$k=m$: $|\,''\,| \ge 2^{-m}$ für ein $s\in\{\pm1,\pm3\}$]

$$\geq 2^{m^2-m-2} \to \infty \quad \Rightarrow f \text{ nicht diffbar bei } x \in \mathbb{R}$$

2π-per. : f geg $\qquad c_n$ berechnen

f Regelfkt $\qquad c_n$ bilden NF

f stückweise $C^1 \Rightarrow c_n = \mathcal{O}(|n|^{-1}), \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} = \frac{1}{2}\big(f(t+) + f(t-)\big)$

$f \in C^1 \Rightarrow c_n = o(|n|^{-1})$

$f \in C^\infty \Rightarrow c_n = \mathcal{O}(|n|^{-k}) \quad k \in \mathbb{N}$

c_n gegeben. Wie lautet $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$

$c_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|n|^{2+\varepsilon}}\right), \varepsilon > 0 \Rightarrow f \in C^1$

z.B. $\frac{1}{n^{5/2}}, \frac{1}{\sqrt{n}}$

Bsp Schwingende Saite

$$f_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

part. DGl.

$$\Rightarrow c_k(t) = c_k \cdot \underbrace{\cos kt}_{\text{Schwingung}} \cdot \underbrace{e^{-\mu k t}}_{\text{Dämpfung}}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(t) e^{ikx} = f_t(x)$$