Mathematik 2 für Physik (Analysis 2)   Zentralübung 1

Notiztitel 26.04.2010

1. Tutorübung

am 27.4.2010

Gruppe 8 Lein Di 10-12 im MW2235 (6 Anm.)

(gleichzeitig mit Gruppe 1 Satzger) (20+1 Anm)

Gruppe 4 Ried Di 16-18 (3 Anm)

→ evtl. Fr 8:30 - 10

Gruppe 9 Kinzner Fr 10-12 (20+17 Anm) ← MI 03.10.011 ?

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Beginn der Zentralübung Mo 12:20

Bonus:

- Vorrechnen: Teilaufgaben.
- Jede Aufgabe bekommt 4 Punkte

  1 sinnvoll bearbeitet

  2 größere Lücken

  3 kleine Lücken

  4 (fast) vollständig richtig

Hinweis: Bl 1 A6 (a) $f(x) = 2e^{\cos x}\cos(\sin x) - 1$

Landau-Symbole O, o

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{D} \setminus D$. Für $f, g : D \to \mathbb{C}$

$$f \sim_a g :\Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$ (f und g sind asymptotisch gleich)

$$f \in o_a(g) :\Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$ (f ist "klein Oh" von g)

$$f \in O_a(g) :\Longleftrightarrow \exists C, \epsilon > 0 \ \forall x \in B_\epsilon(a) \cap D : |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

$\exists C > 0 \ \exists \epsilon > 0$ (f ist "groß Oh" von g)

Bemerkungen

- Typisch: $a = 0$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, oder $\mathbb{R}^+$. D wird praktisch nie angegeben.
- a als Index wird häufig weggelassen. Im Zweifel ergänzt man für $x \to a$.

- $a = \pm\infty$ ist zugelassen, wobei zB. $B_\epsilon(+\infty) =]\frac{1}{\epsilon}, \infty[$!
- Häufig ist $g(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$
- Ausdrücke, statt Fktn: $\sin x \sim x$ für $x \to 0$

  statt $(x \mapsto \sin x) \sim (x \mapsto x)$
- Statt $\in, \subset$ schreibt man häufig "$=$". Achtung keine Symmetrie.

  $\tan x \in \tilde{O}_0(x) \subset o_0(1)$ wird $\tan x = \tilde{O}(x) = o(1)$
- Wählt man $D = \mathbb{N}$, $a = \infty$: Asymptotik von Folgen: $\binom{n}{3} = \tilde{O}(n^3)$

Satz: Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ wie in der Def.

(i) Aus $\limsup_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$ folgt $f \in \tilde{O}_a(g)$

(ii) Existiert $\lim_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$, so ist $f \in \tilde{O}_a(g)$

Bew: (i) $h(x)$ reelle Fkt, so ist $\limsup\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \sup\{h(x) : x \in B_\epsilon(a)\cap D\}$ definiert. Ist $C = \limsup\limits_{x\to a} h(x) \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\sup\{h(x) : x \in B_\epsilon(a)\cap D\} \leq C + 1$. Für $h = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ folgt:

$\forall x \in B_\epsilon(a)\cap D : \ |f(x)| \leq (C+1)\,|g(x)| \Rightarrow f \in O_a(g)$

(ii) Aus $\lim\limits_{x\to a} h(x) = c$ folgt $\limsup\limits_{x\to a} h(x) = c$

Bem: Aus $f(x) \sim c \cdot g(x)$, folgt $f \in O(g)$

Anwendungen: $(x \to 0)$

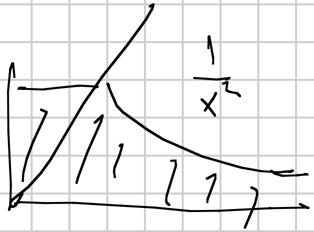
$f(x) = O(1) \Leftrightarrow f$ ist lokal beschränkt, $\exists \epsilon > 0, C > 0 : x \in B_\epsilon(0) \Rightarrow |f(x)| < C$

$f(x) = f(0) + o(1) \Leftrightarrow f$ ist stetig bei 0 $\left(f(x) - f(x_0) = o(1) \right)$

$f(x) = f(0) + O(x) \Leftrightarrow f$ lipschitz stetig bei 0

$f(x) = f(0) + cx + o(x) \Leftrightarrow f$ diffbar bei 0, $f'(0) = c$

$f(x) = O(x^{-1+\alpha}), \alpha > 0 \Rightarrow |f|$ ist lokal integrierbar bei 0

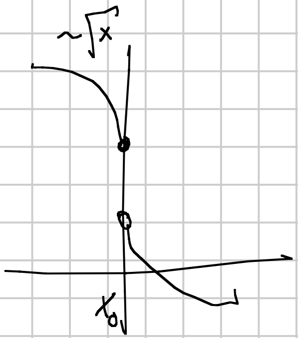


$\exists \epsilon > 0: \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |f(x)|\,dx < \infty$, ($|f|$ uneigentlich ibar in einer Ugb der 0)

$f(x) = O(|x - x_0+|^{\alpha})$ $\quad x \to x_0+ \Rightarrow$ $\left| \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} \right|$

$\alpha > 0$

ist um x_0 ibar



Bl. 1 1.(a) $(f_n) \subset C^1[a,b]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ existiert, $\sum f_n'$ glm kgt

$\Rightarrow \sum f_n$ glm kgt und

$$\frac{d}{dx}\left(\sum f_n\right) = \sum \left(\frac{d}{dx} f_n\right)$$

(a) Für $f \in C^1[a,b]$ gilt $\|f\|_s \leq |f(a)| + (b-a)\|f'\|_s$, denn

$$\forall x \in [a,b]: \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \qquad \|f\|_s \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \int_a^x \underbrace{|f'(t)|}_{\leq \|f'\|_s}\,dt \leq |f(a)| + (b-a)\|f'\|_s$$

Sei $c = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(a)$ und $f(x) = c + \int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\right)dt$,

Offenbar $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$. $f_k(x) = f_k(a) + \int_a^x f_k'(t)\,dt$

$$0 \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right\|_s \leq \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(a) - c\right| + (b-a)\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k' - f'\right\|_s$$

$$= \underbrace{\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(a)\right|}_{\to 0} + (b-a)\underbrace{\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k'\right\|_s}_{\xrightarrow[f' \text{ glm kgt}]{} 0}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ glm kgt.

(b) Nein. GGbsp: $f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k}$. Man muss abs kgz für $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(a)$ fordern

2.(a) Dirichlet-Kern $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} \underset{z=e^{it}}{=} \sum_{k=-N}^{N} z^k \underset{t\notin 2\pi\mathbb{Z}}{=} \frac{z^{N+1}-z^{-N}}{z-1}$

$$= \frac{z^{N+1/2} - z^{-N-1/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} = \frac{\sin(N+1/2)t}{\sin t/2}$$

$$D_N(0) = 2N+1 = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(N+1/2)t}{\sin t/2}$$, also stetige Fortsetzung

(b) $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = 1 + 2\cos t + 2\cos 2t + \dots$

$\boxed{m}$