Analysis 2 für Physiker *

Domenico P.L. Castrigiano †

15. November 2010

*Vorlesungsskript SS 2010 erstellt von Dipl. Math. W.Kinzner

†Zentrum Mathematik TU München

Inhaltsverzeichnis

12 Fourierreihen

(1) Definition. Seien $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $c_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{-N, -N+1, \ldots, N-1, N\}$. Dann heißt

$$T(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq N$.

Offenbar ist T stetig und 2π-periodisch, d.h. es gilt $T(x + 2\pi) = T(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Eine einfache Anwendung von (7.20) ergibt, dass damit T sogar gleichmäßig stetig ist. Die Koeffizienten c_k sind durch T eindeutig bestimmt, denn

$$\int_0^{2\pi} T(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \sum_{j=-N}^{N} c_j \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}}_{\delta_{jk}} = c_k.$$

Ziel ist die Approximation von Regelfunktionen durch trigonometrische Polynome. Wir erinnern (siehe (9.15)ff.), dass Regelfunktionen solche Funktionen sind, wofür alle links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren, weshalb insbesondere stetige oder monotone Funktionen oder Funktionen beschränkter Variation über $[a, b]$ dazugehören. (Die Resultate für Regelfunktionen lassen sich teilweise auf die größere Klasse der sog. Lebesgue-integrierbaren Funktionen verallgemeinern. Wir werden darauf zurückkommen.)

Für $f, g \in R[0, 2\pi]$ *setze*

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \frac{dx}{2\pi} \quad \text{und} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}}.$$

Dann gilt:

- $\|f\|_2 \geq 0$,
- $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ positiv homogen,
- $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ Dreiecksungleichung.

Beweis der Dreiecksungleichung. Sei (φ_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \xrightarrow{\text{glm}} f$. Daraus folgt, dass auch $|\varphi_n|^2 \xrightarrow{\text{glm}} |f|^2$. Wegen (9.14) genügt es daher, die Dreiecksungleichung für Treppenfunktionen zu zeigen. Diese folgt aus der Minkowski Ungleichung. □

Eine Funktion f auf $[a, b]$, die nur an endlich vielen Stellen ungleich Null ist, ist offenbar eine Regelfunktion mit $\|f\|_2 = 0$. Das zeigt, dass $\| \cdot \|_2$ auf $R[0, 2\pi]$ nicht positiv definit und somit keine Norm auf $R[0, 2\pi]$ ist. Siehe jedoch die folgende Übung.

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige, dass $f = 0$ ist, falls f stetig ist mit $\|f\|_2 = 0$. Also ist $(C[0, 2\pi], \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum.

(2) Lemma. ***Grundlegendes Orthonormalsystem.*** *Sei* $e_k(x) := e^{ikx}$ *für* $k \in \mathbb{Z}$ *und* $x \in [0, 2\pi]$. *Dann gilt offenbar* $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}$.

(3) Definition. Für $f \in R[0, 2\pi]$ und $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}_k := \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{2\pi} = \langle e_k, f \rangle$$

der k**-te Fourierkoeffizient von** f und

$$Sf(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} := \left(\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

die **Fourierreihe** von f an der Stelle $x \in [0, 2\pi]$. Weiter heißt

$$S_N f := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e_k$$

das N-te zu f gehörige trigonometrische Polynom.

Im Allgemeinen liegt weder die Konvergenz von $(S_N f(x))_{N \in \mathbb{N}}$ für einzelne x vor, noch ggf. die Gleichheit $Sf(x) = f(x)$. Die Stetigkeit von f und die Gleichheit $f(0) = f(2\pi)$ reichen dazu nicht aus.

(4) Folgerung aus der Orthonormalität. *Seien* $T := \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k$ *und* $S := \sum_{k=-N}^{N} b_k e_k$ *mit* a_k, $b_k \in \mathbb{C}$ *zwei trigonometrische Polynome. Dann ist*

$$\langle T, S \rangle = \left\langle \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k, \sum_{j=-N}^{N} b_j e_j \right\rangle = \sum_{k,j=-N}^{N} \overline{a_k}\, b_j \underbrace{\langle e_k, e_j \rangle}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=-N}^{N} \overline{a_k}\, b_k.$$

Insbesondere ist

$$\|S_N f\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}_k|^2.$$

(5) Lemma. ***Bestapproximation.*** *Sei* $f \in R[0, 2\pi]$ *und* T *ein trigonometrisches Polynom vom Grad* $\leq N$ *mit* $T \neq S_N f$. *Dann gilt:*

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_N f\|_2^2 < \|f - T\|_2^2.$$

Das bedeutet, dass $S_N f$ *die Bestapproximation von* f *ist bezüglich* $\|\cdot\|_2$ *durch trigonometrische Polynome vom Grad* $\leq N$. *Insbesondere gilt für alle* $N \in \mathbb{N}$:

- $\|f\|_2^2 = \|S_N f\|_2^2 + \|f - S_N f\|_2^2$ ***Projektionssatz***

- $\|S_N f\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2 \le \|f\|_2^2$ ***Bessel Ungleichung***

Beweis. $\|f-T\|_2^2 = \langle f-T, f-T\rangle = \langle f,f\rangle - \langle T,f\rangle - \langle f,T\rangle + \langle T,T\rangle = \|f\|_2^2 - \sum_k \overline{c_k}\langle e_k, f\rangle - \sum_k c_k\langle f, e_k\rangle + \sum_k \overline{c_k}c_k = \|f\|_2^2 - \sum_k \overline{c_k}\hat{f}_k - \sum_k c_k\overline{\hat{f}_k} + \sum_k \overline{c_k}c_k = \|f\|_2^2 - \sum_k |\hat{f}_k|^2 + \sum_k |c_k - \hat{f}_k|^2$.

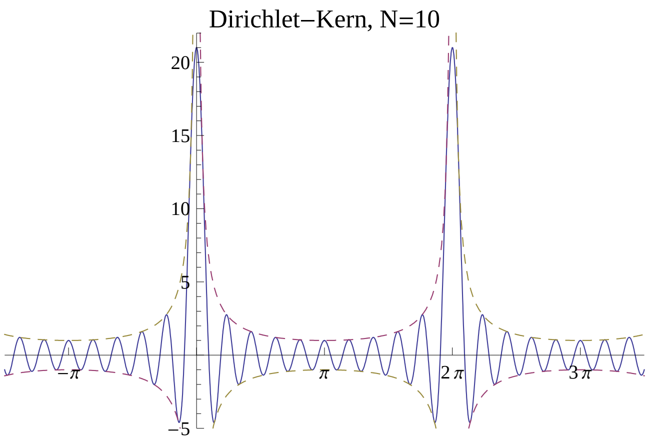
Daher ist $\|f-T\|_2$ minimal genau dann, wenn $\sum_k |c_k - \hat{f}_k|^2 = 0$, d.h. wenn $c_k = \hat{f}_k\ \forall k$. Daraus folgt die Behauptung. □

(6) Dirichlet Kern. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} \left(\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\frac{dt}{2\pi}\right) e^{ikx} = \int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}\right)\frac{dt}{2\pi} = \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t)\frac{dt}{2\pi} \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = \begin{cases} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} & \text{für } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1 & \text{für } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{$*$}$$

D_N heißt **Dirichlet Kern N-ten Grades**.



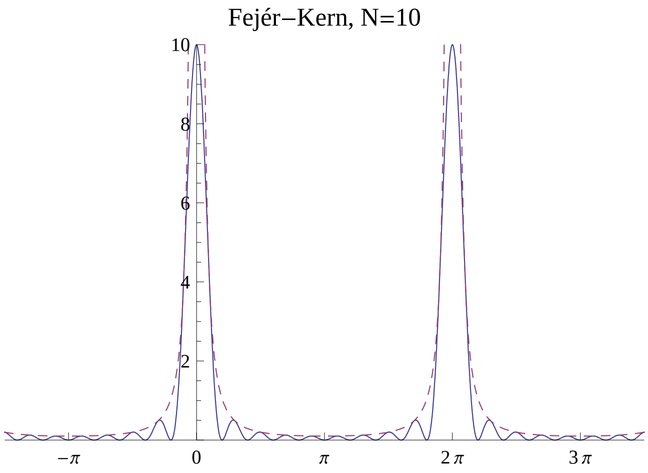
Üb Beweise die Formel $(*)$. Hinweis: Endliche geometrische Reihe.

Um die Konvergenz von $(S_N)_N f$ zu verbessern, bildet man die **Cesàro Mittel** davon. Siehe (11).

(7) Fejer Kern. *Das Cesàro Mittel* $\sigma_N f := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n f$ *ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad* $< N$. *Es gilt* $\sigma_N f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) F_N(x-t)\frac{dt}{2\pi}\ \forall x \in \mathbb{R}$ *mit*

$$F_N(t) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}Nt}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 & \text{für } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ N & \text{für } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{$**$}$$

F_N heißt **Fejer Kern** N**-ten Grades**. Eine zusätzliche günstige Eigenschaft von F_N gegenüber D_N ist die Nichnegativität $F_N(t) \geq 0$.



$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise die Formel (∗∗). Hinweis: Weise zunächst $(\sin\frac{t}{2})^2 D_k(t) = \frac{1}{2}(\cos kt - \cos(k+1)t)$ nach.

(8) Lemma zum Fejer Kern. F_N *hat folgenden Eigenschaften:*

(i) F_N *ist* 2π*-periodisch, d.h.* $F(t+2\pi) = F(t)\ \forall t$, *und gerade, d.h.* $F(-t) = F(t)\ \forall t$.

(ii) $F_N \geq 0$.

(iii) $\int_0^{2\pi} F_N(t)\frac{dt}{2\pi} = 1$.

(iv) $\forall \epsilon > 0\ \forall r \in]0, \pi[\ \exists M \in \mathbb{N}$:

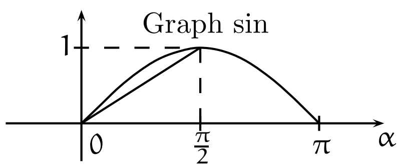
$$\int_{-r}^{r} F_N(t)\frac{dt}{2\pi} > 1 - \epsilon \quad \forall N \geq M.$$

Beweis. (i) und (ii) sind klar.

(iii) Es ist $F_N = \frac{1}{N}(D_0 + \ldots + D_{N-1}) = \frac{1}{N}(e_0 + \underbrace{e_{-1} + e_0 + e_1}_{D_1} + \ldots + \underbrace{e_{-N+1} + \ldots + e_0 + \ldots + e_{N-1}}_{D_{N-1}})$

und $\int_0^{2\pi} e_k \frac{dt}{2\pi} = \delta_{0k}$. Damit folgt die Behauptung.

(iv) Es ist $\sin\alpha > \frac{2}{\pi}\alpha$ für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:



Hiermit folgt $F_N(t) \le \frac{1}{N}\frac{1^2}{(\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}t)^2} = \frac{\pi^2}{Nt^2}$ für $0 < |t| \le \pi$ und daher $\int_r^\pi F_N(t)dt \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Das ergibt die Behauptung.

$\square$

(9) Satz von Fejer.

(a) *Seien* $f \in R[0, 2\pi]$ *und* $x_0 \in]0, 2\pi[$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \sigma_N f(0) = \sigma_N f(2\pi) &\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f(0+) + f(2\pi-)), \\ \sigma_N f(x_0) &\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f(x_0-) + f(x_0+)). \end{aligned}$$

(b) *Für* $f \in C[0, 2\pi]$ *mit* $f(0) = f(2\pi)$ *gilt*

$$\sigma_N f \overset{\text{glm}}{\longrightarrow} f.$$

Beweis. Man bilde die 2π-periodische Funktion $\tilde f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde f(x+k2\pi) := f(x)\ \forall x \in [0, 2\pi[, k \in \mathbb{Z}$. Aus (7) folgt $\sigma_N \tilde f(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde f(x_0 - t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi}$, weil der Intergrand 2π-periodisch ist.

(a) Sei $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Weil $\int_0^\pi F_N(t)\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}$ nach (8)(i),(iii) und weil $F_N(t) \ge 0$ nach (8)(ii), folgt

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\pi \tilde f(x_0 - t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi} - \frac{1}{2}\tilde f(x_0-)\right| &= \left|\int_0^\pi (\tilde f(x_0 - t) - \tilde f(x_0-))F_N(t)\frac{dt}{2\pi}\right| \le \\ &\le \int_0^\pi |\tilde f(x_0 - t) - \tilde f(x_0-)|F_N(t)\frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ und dazu $r \in]0, \pi[$ derart, dass $|\tilde f(x_0 - t) - \tilde f(x_0-)| < \epsilon$ für $t \in]0, r]$. Wähle $M(\epsilon, r)$ gemäß (8)(iv). Dann gilt $\forall N \ge M(\epsilon, r)$:

$$\int_0^\pi |\tilde f(x_0 - t) - \tilde f(x_0-)|F_N(t)\frac{dt}{2\pi} \le \epsilon\int_0^r F_N(t)\frac{dt}{2\pi} + 2\|\tilde f\|_s\int_r^\pi F_N(t)\frac{dt}{2\pi} \le \epsilon + 2\|\tilde f\|_s\epsilon.$$

Das zeigt $\int_0^\pi \tilde f(x_0 - t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\tilde f(x_0-)$. Ebenso folgt $\int_{-\pi}^0 \tilde f(x_0 - t)F_N(t)\frac{dt}{2\pi} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\tilde f(x_0+)$. Damit gilt $\sigma_N \tilde f(x_0) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(\tilde f(x_0+) + \tilde f(x_0-))$ für jedes $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Das beweist (a).

(b) Beachte, dass $\tilde f$ gleichmäßig stetig ist. Daher ist $r > 0$ so wählbar, dass $|\tilde f(x - t) - \tilde f(x)| < \epsilon\ \forall\ 0 \le |t| \le r\ \forall x \in \mathbb{R}$. Damit folgt $|\sigma_N \tilde f(x) - \tilde f(x)| \le \epsilon(1 + 2\|\tilde f\|_s)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall N \ge M(\epsilon, r)$. D.h. es gilt (b). $\square$

(10) Korollar. ***Approximation im quadratischen Mittel.*** *Für* $f \in R[0, 2\pi]$ *gilt*

$$\|S_N f - f\|_2 \overset{N\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Man sagt, $(S_N f)_N$ konvergiert im **quadratischen Mittel** gegen f.

Beweis. (a) Sei zunächst $f \in C[0, 2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann gilt nach (9)(b)

$$\|S_N f - f\|_2^2 \overset{(5)}{\leq} \|\sigma_N f - f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |\sigma_N f(t) - f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} \leq \|\sigma_N f - f\|_s^2 \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Sei nun $f \in R[0, 2\pi]$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $g \in C[0, 2\pi]$ mit $g(0) = g(2\pi)$ und $\|f - g\|_2 \leq \frac{\epsilon}{3}$, siehe (c). Damit schätzt man ab

$$\|S_N f - f\|_2 \leq \|S_N f - S_N g\|_2 + \|S_N g - g\|_2 + \|g - f\|_2.$$

Da $\|g-f\|_2 \leq \frac{\epsilon}{3}$ nach Wahl, $\|S_N g - g\|_2 \leq \frac{\epsilon}{3}$ für alle N groß genug nach (a), und $\|S_N f - S_N g\| = \|S_N(f - g)\|_2 \leq \|f - g\|_2 \leq \frac{\epsilon}{3}$ nach (5), folgt die Behauptung.

(c) Es bleibt die Existenz von g zu zeigen. Dazu wird zunächst die Regelfunktion f bez. $\|\cdot\|_s$ durch eine Treppenfunktion φ approximiert. Dann approximiert man φ bez. $\|.\|_2$ durch eine stetige Funktion g, indem man die Indikatorfunktionen $1_{]a,b[}$ bez. $\|.\|_2$ durch stetige Funktionen approximiert.

$\boxed{\text{Üb}}$ Man führe die Beweisskizze in (10)(c) aus. □

(11) Lemma. ***Cesàro Mittel.*** *Seien X ein normierter Raum, (a_n) eine Folge in X und $c_n := \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ das Cesàro Mittel, d.i. das arithmetische Mittel der ersten n Folgenglieder. Konvergiert (a_n) gegen $a \in X$, dann auch (c_n).*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\|a_k - a\| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall k > N$. Sei $N_1 := \max\left\{N, \frac{2}{\epsilon}\sum_{k=1}^N \|a_k - a\|\right\}$. Für $n > N_1$ folgt

$$\begin{aligned}
\|c_n - a\| &= \left\|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right) - a\right\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (a_k - a)\right\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \|a_k - a\| = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^N \|a_k - a\| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^n \|a_k - a\| \leq \frac{1}{N_1}\sum_{k=1}^N \|a_k - a\| + \frac{1}{n}(n-N)\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Ein Beispiel, dass die Umkehrung von Lemma (11) nicht gilt, ist offenbar die Folge $(-1)^n$. — Es folgt ein weiteres Korollar zum Satz von Fejer.

(12) Korollar. ***Grenzwert einer Fourierreihe.*** *Sei $f \in R[0, 2\pi]$ und $x_0 \in [0, 2\pi]$. Falls $Sf(x_0)$ existiert, dann gilt:*

$$\begin{aligned}
Sf(x_0) &= \frac{1}{2}(f(x_0-) + f(x_0+)) \quad \textit{für} \;\; x_0 \in]0, 2\pi[, \;\; \textit{und} \\
Sf(x_0) &= \frac{1}{2}(f(0+) + f(2\pi-)) \quad \textit{für} \;\; x_0 \in \{0, 2\pi\}.
\end{aligned}$$

Beweis. Wende auf das Cesàro Mittel $\sigma_N f = \frac{1}{N}(S_0 f + S_1 f + \ldots + S_{N-1} f)$ die Aussagen (11) und (9)(a) an. □

Wie erwähnt, heißt eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ **2π-periodisch**, wenn $f(x+2\pi) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Jede Funktion auf $[0, 2\pi[$ läßt sich offenbar eindeutig zu einer 2π-periodischen Funktion fortsetzen. Jede Funktion auf $[0, 2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$ läßt sich ebenfalls eindeutig zu einer 2π-periodischen Funktion fortsetzen. Eine 2π-periodische Regelfunktion hat die **Mittelwerteigenschaft**, wenn $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ an jeder Stelle x gilt. Für eine 2π-periodische Regelfunktion f seien $\hat{f}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von $f|_{[0,2\pi]}$.

(13) Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und stetig differenzierbar. Dann konvergiert $(S_N f)_N$ normal und somit gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Die Ableitung f' ist 2π-periodisch und stetig. Daher ist $\widehat{f'}_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f'(x) \frac{dx}{2\pi} \overset{\text{part.Int.}}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} f(x)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-ik) e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{2\pi} = 0 + ik\hat{f}_k$. Es gilt also $\widehat{f'}_k = ik\hat{f}_k,\ k \in \mathbb{Z}$. Weiter gilt wegen der Bessel Ungleichung in (5), dass $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}_k|^2 < \infty$. Für $k \neq 0$ ist schließlich $|\hat{f}_k| = \frac{1}{k}|\widehat{f'}_k| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k^2} + |\widehat{f'}_k|^2)$. Damit folgt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k| < \infty.$$

Da $S_N f = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e_k$ beschränkt ist, ist $(S_N f)_N$ eine Folge in $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Sie ist normal konvergent, weil $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\hat{f}_k e_k\|_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k| < \infty$. Nach dem Weierstraß Kriterium (10.3) ist $(S_N f)_N$ gleichmäßig konvergent und somit Sf stetig nach (9.8). Aus dem vorangegangenem Korollar (12) folgt $Sf = f$. $\square$

(14) Satz. *Konvergiert die trigonometrische Reihe $\left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e_k\right)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$, dann ist die durch die Reihe definierte Funktion f mit*

$$f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},\ x \in \mathbb{R}$$

2π-periodisch und stetig und es gilt

$$c_k = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}.$$

Beweis. Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f wegen der 2π-Periodizität der trigonometrischen Polynome. Daher ist f 2π-periodisch und stetig. Außerdem sind $\int_0^{2\pi}$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ vertauschbar wegen (9.14). Daher gilt für $l \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ilx} \frac{dx}{2\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} \frac{dx}{2\pi}}_{=\delta_{kl}} = c_l.$$

$\square$

Bevor die Theorie weiter ausgebaut wird, folgen einige Beispiele für Fourierreihen. Zunächst die

(15) Cosinus-Sinus-Darstellung. *Sei* $f \in R[0, 2\pi]$. *Dann ist*

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei die ***Euler-Formeln***

$$\begin{aligned} a_k &= \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \ \ k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \ \ k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

gelten, denn $S_N f(x) = \hat{f}_0 + \sum_{k=1}^{N} [\hat{f}_k(\cos kx + i \sin kx) + \hat{f}_{-k}(\cos kx - i \sin kx)]$. *Offenbar sind alle Koeffizienten* a_k, b_k *reell, wenn* f *reellwertig ist. Ist* f 2π*-periodisch, dann gilt weiter:*

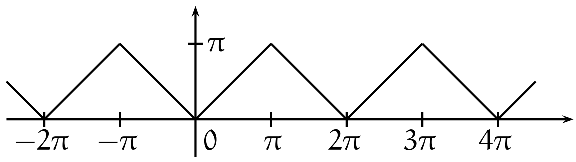
$$\begin{aligned} f \text{ ungerade} &\implies \quad a_k = 0 \ \forall k \\ f \text{ gerade} &\implies \quad b_k = 0 \ \forall k. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige: $1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cos kx = \begin{cases} \infty & \text{für } x \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \text{divergiert} & \text{sonst.} \end{cases}$

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige: $\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin kt = \frac{r \sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}$ für $|r| < 1$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige: Die Sinusreihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sin(2^k x)$, $x \in \mathbb{R}$, konvergiert gleichmäßig gegen eine 2π-periodische Funktion f, die stetig aber nirgends differenzierbar ist.

(16) Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi[$. Da f gerade ist,



sind $b_k = 0 \ \forall k$. Für $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx$ erhält man $a_k = \begin{cases} \pi & \text{für } k = 0 \\ \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2}((-1)^k - 1) & \text{für } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

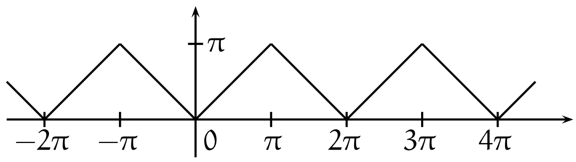
(denn für $k \geq 1$ ist $\int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = x \frac{1}{k} \sin kx |_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin kx \, dx = \frac{1}{k^2} \cos kx |_0^{\pi} = \frac{1}{k^2}((-1)^k - 1)$).
Die Fourierreihe von f lautet daher $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$. Da die Reihe (normal) konvergiert auf $\mathbb{R}$ und weil f stetig ist, folgt aus (12), dass $Sf = f$ und damit

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Hieraus gewinnt man für $x = 0$ die Gleichung $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, d.h.

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots .$$

(17) Beispiel. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $f(x) = \cos ax$ für $x \in [-\pi, \pi[$.



Da f gerade ist, sind $b_k = 0$ $\forall k$. Für die Cosinuskoeffizienten erhält man

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\cos ax \cos kx}_{=\frac{1}{2}[\cos(a+k)x + \cos(a-k)x]} \, dx = \frac{1}{\pi}(-1)^k \sin(a\pi) \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right).$$

Wegen $|a_k| < \frac{1}{\pi} \left| \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| = \frac{2}{\pi k^2} \frac{|a|}{\left|1 - \frac{a^2}{k^2}\right|} < \frac{|a|}{k^2}$ für $\frac{|a|}{k} < 1$ ist $Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ (normal) konvergent. Weiter ist f stetig. Daher folgt aus (12), dass $Sf = f$, d.h.

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2a}{a^2 - k^2} \cos kx \right), \quad |x| \leq \pi.$$

Hieraus gewinnt man für $x = \pi$

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

die sogenannte "Partialbruchzerlegung" des Cotangens.

(18) Riemann-Lebesgue Lemma. Sei $f \in R[a, b]$. Dann gilt

$$\lim_{r \to \infty} \int_a^b e^{-irx} f(x) \, dx = 0.$$

Beweis. Für $f = 1_{]c,d[}$ mit $a \leq c < d \leq b$ folgt $\left| \int_a^b e^{-irx} 1_{]c,d[}(x) dx \right| = \left| \frac{i}{r} \left(e^{-ird} - e^{-irc} \right) \right| \leq \frac{2}{r} \overset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Damit gilt die Behauptung auch für jede Treppenfunktion $f \in T[a, b]$. — Sei nun $f \in R[a, b]$ und $\epsilon > 0$. Nach der letzten Bemerkung zu (9.11) existiert $\varphi \in T[a, b]$ mit $\|\varphi - f\|_s \leq \frac{\epsilon/2}{b-a}$. Damit ist $\left| \int_a^b e^{-irx} f(x) \, dx \right| \leq \underbrace{\left| \int_a^b e^{-irx} (f(x) - \varphi(x)) \, dx \right|}_{\leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \, dx \leq \|f - \varphi\|_s (b-a) \leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left| \int_a^b e^{-irx} \varphi(x) \, dx \right|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} \leq \epsilon$ $\forall r > R$ mit R groß genug. $\square$

(19) Korollar. *Sei* $f \in R[a,b]$. *Dann gilt*

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^b f(x) \sin rx \, dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^b f(x) \cos rx \, dx = 0.$$

Insbesondere gilt $\hat{f}_k \stackrel{k\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ *im Fall* $[a,b] = [0, 2\pi]$.

Man bemerkt, dass die letzte Aussage von (19) bereits aus der Bessel Ungleichung folgt. Das Riemann-Lebesgue Lemma gilt allgemeiner für Lebesgue-integrierbare Funktionen.

(20) Satz von Dirichlet. Sei f 2π-periodisch und $f|_{[0,2\pi]} \in R[0, 2\pi]$. Weiter sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Setze

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0-)}{x-x_0} & \text{für } x < x_0, \\ \frac{f(x)-f(x_0+)}{x-x_0} & \text{für } x > x_0, \\ 0 & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Falls $|F|$ uneigentlich integrierbar ist in einer Umgebung von x_0, dann existiert $Sf(x_0)$.

Beweis. Sei o.E. $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Dann ist $S_N(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi}$. Weiter beachte, dass $\int_0^{\pi} D_N(t) \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-N}^{N} \int_0^{\pi} e^{ikt} \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}$ und $D_N(t) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$ für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi} - \frac{1}{2} f(x_0-) \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0-)}{-t} \frac{-t}{\sin \frac{1}{2} t} \sin(N + \frac{1}{2}) t \frac{dt}{2\pi} \right| = \\
&= \left| \int_0^{\pi} \left[F(x_0 - t) \frac{\frac{-t}{2}}{\sin \frac{1}{2} t} \right] \sin(N + \frac{1}{2}) t \frac{dt}{\pi} \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^{\delta} \dots \frac{dt}{\pi} \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} \dots \frac{dt}{\pi} \right| \quad (\text{für } \delta \in]0, \pi[) \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} \int_0^{\delta} |F(x_0 - t)| dt + + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\delta}^{\pi} \frac{F(x_0 - t) \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin(N + \frac{1}{2}) t \, dt \right|,
\end{aligned}$$

da $\frac{x}{\sin x} \leq \frac{x}{\frac{x}{\pi/2}}$ auf $[0, \pi/2]$. Nun ist $\frac{1}{2} \int_0^{\delta} |F(x_0 - t)| dt \leq \epsilon$ für $\delta > 0$ klein genug, weil $|F|$ uneigentlich integrierbar ist in einer Umgebung von x_0, und $\int_{\delta}^{\pi} \frac{F(x_0-t)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin(N + \frac{1}{2}) t \, dt \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue. — Ebenso folgt $\int_{-\pi}^{0} f(x_0 - t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} f(x_0+)$. $\square$

In (20) ist natürlich $Sf(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$. Siehe dazu (12).

(21) Definition und Korollar. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ***2π-periodisch stückweise stetig differentierbar,*** *d.h.* f *ist* 2π*-periodisch mit einer Zerlegung* $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_r = 2\pi$ *derart, dass* $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ *stetig differenzierbar ist für* $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ *und* $f(x_i-), f(x_i+), f'(x_i-), f'(x_i+)$ *existieren in* $\mathbb{C}$ *für* $i \in \{1, \ldots, r\}$. *Dann gilt*

$$Sf(x) \quad = \quad \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $Sf(x) = f(x) \quad \forall x \neq x_i + 2\pi k, \ i \in \{1, \ldots, r\}, \ k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach dem Satz von Dirichlet ist lediglich zu prüfen, ob jedes x_i die Voraussetzungen an x_0 in (20) erfüllt.

Für $x < x_i$ existiert $\xi \in]x, x_i[$ mit $F(x) = \frac{f(x)-f(x_i-)}{x-x_i} \overset{\text{MWS}}{=} f'(\xi) \overset{x\to x_i}{\longrightarrow} f'(x_i-)$. Entsprechendes gilt in der Situation $x > x_i$. Also ist F insbesondere beschränkt in einer Umgebung von x_i und somit eine Regelfunktion. □

Später wird gezeigt, dass Sf in (21) auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert, welches keine Unstetigkeitsstelle enthält.

(22) Rechenregeln für die Fourierkoeffizienten. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π*-periodisch mit* $f|_{[0,2\pi]} \in R[0, 2\pi]$*. Eine solche Funktion sei auch* g*. Dann gilt:*

(a) *Linearität*: $(\widehat{f + \alpha g})_k = \hat{f}_k + \alpha\hat{g}_k$.

(b) *Konjugation*: $g(t) = \overline{f(t)} \Longrightarrow \hat{g}_k = \overline{\hat{f}_{-k}}$.

(c) *Zeitumkehr*: $g(t) = f(-t) \Longrightarrow \hat{g}_k = \hat{f}_{-k}$.

(d) *Verschiebung im Frequenzbereich*: $g(t) = e^{int}f(t)$ für $n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \hat{g}_k = \hat{f}_{n-k}$.

(e) *Verschiebung im Zeitbereich*: $g(t) = f(t + a)$ für $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \hat{g}_k = e^{ika}\,\hat{f}_k$.

(f) *Stammfunktion und Ableitung: Sei zusätzlich* $\int_0^{2\pi} f = 0$ *und sei* $g(t) = c + \int_0^t f(s)ds$ *für ein* $c \in \mathbb{C}$*. Dann ist* g 2π*-periodisch und stetig und es ist*

$$\hat{g}_0 = c - \int_0^{2\pi} sf(s)\frac{ds}{2\pi}, \quad ik\hat{g}_k = \hat{f}_k \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

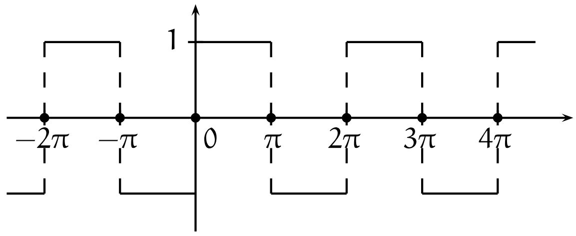
Damit erhält man Sf *durch gliedweises differenzieren von* Sg*. Beachte, dass* g *nicht differenzierbar zu sein braucht.*

Beweis. (f) Offensichtlich ist g 2π-periodisch. Da $|g(t+h)-g(t)| = \left|\int_t^{t+h} f(s)ds\right| \leq \|f\|_\infty |h| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, ist g stetig. Es ist $\hat{g}_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\left(c + \int_0^t f(s)ds\right)\frac{dt}{2\pi} = c\,\delta_{0k} + \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} e^{-ikt}1_{[0,t]}(s)f(s)ds\right)\frac{dt}{2\pi}$. Wie anschließend begründet, darf man in diesem Ausdruck die Integrationsreihenfolge vertauschen, d.h. erst über t und dann über s integrieren. Mit $1_{[0,t]}(s) = 1_{[s,2\pi]}(t)$ erhält man $\hat{g}_k = c\,\delta_{0k} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\left(\int_s^{2\pi} e^{-ikt}dt\right)ds$. Wertet man das innere Integral aus und benutzt $\int_0^{2\pi} f = 0$, so folgt die Behauptung: $\hat{g}_0 = c + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)(2\pi - s)ds = c + 0 - \int_0^{2\pi} sf(s)\frac{ds}{2\pi}$ und $\hat{g}_k = \int_0^{2\pi} f(s)\left[\frac{1}{-ik}e^{-ikt}\right]_{t=s}^{t=2\pi}\frac{ds}{2\pi} = -\frac{1}{ik}\cdot 0 + \frac{1}{ik}\hat{f}_k$ für $k \neq 0$.

Ist f eine Treppenfunktion, so läßt sich die Vertauschbarkeit der obigen Integrale direkt nachrechnen. Für den allgemeinen Fall einer Regelfunktion f approximiert man diese durch eine Treppenfunktion in der Supremumsnorm. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise (a)-(e) von (22).

Beispiel zur Regel (22)(f). Sei f 2π-periodisch mit $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ und $f(x) = \text{signum}(x)$ für $x \in]-\pi, \pi[$. Es gilt $\hat{f}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f = 0$ und $g(x) := \int_0^x f(s)ds = |x|$ für $|x| \leq \pi$.



Nach (16) ist $Sg(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. Daher ist $Sf(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ nach (22)(f). Nun ist f 2π-periodisch stückweise stetig differenzierbar und hat die Mittelwerteigenschaft. Nach (21) konvergiert daher und ist $Sf = f$. Somit gilt

$$\mathrm{signum}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \quad |x| < \pi.$$

Es folgt eine Verschärfung von (13).

(23) Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ derart, dass $f(x) = c + \int_0^x g(t)\,dt$ gilt für ein $c \in \mathbb{C}$ und eine 2π-periodische Funktion g mit $g|_{[0,2\pi]} \in R[0,2\pi]$ und $\int_0^{2\pi} g(x)dx = 0$. Dann ist f 2π-periodisch und stetig und die Fourierreihe von f konvergiert normal und somit gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Nach (22)(f) ist f 2π-periodisch und stetig und es ist $\hat{g}_k = ik\hat{f}_k$. Außerdem ist $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{g}_k|^2 < \infty$ aufgrund der Bessel Ungleichung. Wie in (13) folgt daraus $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_k| < \infty$. Den Rest zeigt man ebenfalls wie im Beweis zu (13). □

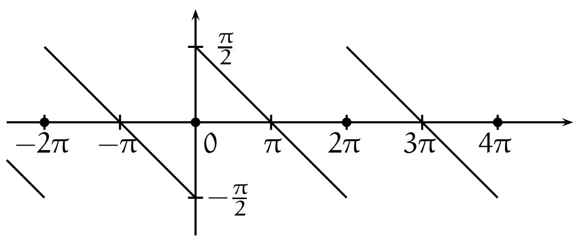
(24) Zentrales Beispiel einer trigonometrischen Reihe. *ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Hierfür gelten:

(a) Die Reihe konvergiert punktweise gegen die 2π-periodische ***Sägezahnfunktion*** *h mit*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{für } x \in]0, 2\pi[. \end{cases}$$



Die Sprungstellen von h sind bei $2k\pi$ mit $h(2k\pi) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(b) Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ für jedes $\delta \in]0, \pi[$. Damit konvergiert sie gleichmäßig auf jeder kompakten Menge, die keine Sprungstelle enthält.

Beweis. (a) Weil h ungerade ist, sind alle $a_k = 0$. Für die Sinuskoeffizienten erhält man $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin kx\,dx = \frac{1}{k}$. Also ist $Sh = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(.)}{k}$. Nach (21) gilt $Sh = h$ punktweise.

(b) Sei $x \in]0, 2\pi[$ und

$$R_N(x) := \int_\pi^x \frac{1}{2}D_N(t)dt = \int_\pi^x \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

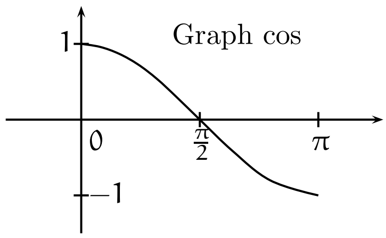
Dann ist einerseits

$$R_N(x) = \frac{1}{2}(x-\pi) + \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin Nx}{N},$$

weil $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos kt$. Andererseits erhält man mittels partieller Integration

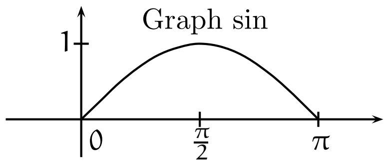
$$R_N(x) = -\frac{\cos(N+\frac{1}{2})t}{(2N+1)\sin\frac{t}{2}}\Bigg|_{t=\pi}^{t=x} + \frac{1}{2N+1}\int_\pi^x \cos(N+\frac{1}{2})t\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)'dt.$$

Nun hat $\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)' = -\frac{1}{(\sin\frac{t}{2})^2}(\cos\frac{t}{2})\frac{1}{2}$ ein einheitliches Vorzeichen auf dem Integrationsbereich $[\pi, x]$ bzw. $[x, \pi]$.



Daher ist der MWS der Integralrechnung (9.28) anwendbar: Es gibt ein ξ zwischen π und x mit $\int_\pi^x \cos(N+\frac{1}{2})t\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)'dt = \cos(N+\frac{1}{2})\xi\int_\pi^x\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)'dt = \cos(N+\frac{1}{2})\xi\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - 1\right)$. Hieraus folgt

$$|R_N(x)| \le \left|\frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}}\right| + \frac{1}{2N+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - 1\right) \le \frac{1}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{2N+1}\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{2}{(2N+1)\sin\frac{x}{2}}.$$



Für $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$, $\delta \in]0, \pi[$, ist $\sin\frac{x}{2} \ge \sin\frac{\delta}{2} > 0$ und daher $|R_N(x)| \le \frac{2}{2N+1}\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ unabhängig von x. $\square$

Schließlich erfolgt mit (24) eine Verschärfung der Aussage (21), was einen weiteren Hauptsatz über Fourierreihen ergibt.

(25) Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch stückweise stetig differenzierbar (siehe (21)). Dann konvergiert die Fourierreihe Sf gleichmäßig auf jeder kompakten Menge K, die keine Unstetigkeitsstelle von f enthält. (Knickstellen dürfen enthalten sein.) Im Übrigen gilt (21).*

Beweis. Seien $s_1, s_2, \dots, s_m$ Unstetigkeitsstellen von f in $[0, 2\pi[$ und

$$\eta_i := f(s_i+) - f(s_i-), \; i = 1, \dots, m$$

die Sprunghöhen. Nun hat $h_i(x) := h(x - s_i)$ mit h aus (24) Sprungstellen genau bei $x = s_i + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ mit Sprunghöhe π. Sei

$$\varphi(x) := f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\eta_i}{\pi} h_i(x), \quad x \neq s_i + 2\pi k.$$

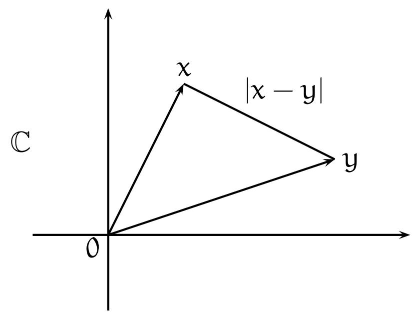
φ ist stetig fortstetzbar auf ganz $\mathbb{R}$ zu einer 2π-periodischen stückweise stetig differenzierbaren Funktion, denn $\varphi(x+) - \varphi(x-) = f(x+) - f(x-) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\eta_i}{\pi}(h_i(x+) - h_i(x-)) \overset{x = s_j + 2\pi k}{=} \eta_j - \frac{\eta_j}{\pi}\pi = 0 \; \forall j, k$. Die stetige Fortsetzung werde weiterhin mit φ bezeichnet. Sei $\varphi'(x)$ die Ableitung von φ an jeder Stelle x, die keine Knickstelle x_i von φ ist. Dann gilt

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt,$$

denn für $x \in [0, 2\pi[$ ist $\int_0^x \varphi'(t)dt = \int_0^{x_1} \varphi'(t)dt + \sum_{i=1}^{l} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'(t)dt \right) + \int_{x_{l+1}}^{x} \varphi'(t)dt = \varphi(x_1) - \varphi(0) + \sum_{i=1}^{l} (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)) + \varphi(x) - \varphi(x_{l+1}) = -\varphi(0) + \varphi(x)$. Nach (23) konvergiert $S\varphi$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Nach (24) konvergieren Sh_i gleichmäßig auf K. Das ergibt die Behauptung. $\square$

13 Metrische Räume

Der Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{K}$ ist der Betrag $|x - y|$ der Differenz von x und y.



Generell ist in einem normierten Raum $(V, \|.\|)$ der Abstand zweier Vektoren $x, y \in V$ durch die Norm $\|x - y\|$ der Differenz der Vektoren x und y gegeben. So ist z.B.

$$\|z - w\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - w_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für Vektoren z, w in $\mathbb{K}^n$ versehen mit der p-Norm oder

$$\|f - g\|_s = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in D\}$$

für Funktionen f, g aus dem Raum $B(D)$ der beschränkten Funktionen auf einer Menge D versehen mit der Supremumsnorm, siehe (9.3). Allgemeiner als normierte Räume sind metrische Räume.

(1) Definition. Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto d(x, y)$$

heißt **Metrik** auf X, wenn $\forall x, y, z \in X$ gilt

- $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ nur für $x = y$ (positiv definit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrisch)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

(X, d) heißt **metrischer Raum**.

(2) Beispiele.

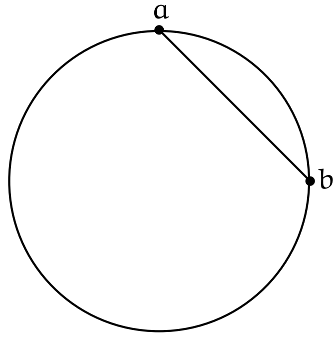
(a) Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum. Dann definiert $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V. Es ist die von der Norm **erzeugte Metrik**.

Beweis. Es ist $\|x - y\| \geq 0$ und es gilt $\|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$. Also ist d positiv definit. — Da $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$, ist d symmetrisch. — Schließlich ist $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$, also erfüllt d die Dreiecksungleichung. □

(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist die Einschränkung von d auf A, d.h. $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$, $d_A(x, y) := d(x, y)$, offensichtlich eine Metrik auf A und somit (A, d_A) ein metrischer Raum. d_A heißt die von d auf A **induzierte Metrik** und (A, d_A) ein **Unterraum** von (X, d).

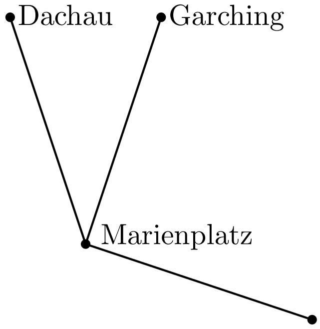
(c) Seien $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum und $A \subset V$ (nicht notwendig ein Untervektorraum von V). Dann ist $d_A(x, y) := \|x - y\| \; \forall x, y \in A$ ist eine Metrik auf A und (A, d_A) ein metrischer Raum.

(d) Für a und b auf der Kreislinie sei $d_1(a, b)$ die Bogenlänge des kürzeren Bogens zwischen a und b und $d_2(a, b)$ die Länge der Sehne von a nach b.



Offenbar sind d_1 und d_2 zwei Metriken auf der Kreislinie. Dabei ist d_2 die durch die euklidsche Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierte Metrik.

(e) MVV-Metrik. Die Länge der Verbindung über den Marienplatz bestimmt den Abstand zweier verschiedener Orte.



(f) Sei X irgendeine Menge. Dann definiert $d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$ eine Metrik auf X, die sogenannte **diskrete Metrik**.

(3) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r > 0$. Dann heißt

$$U_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

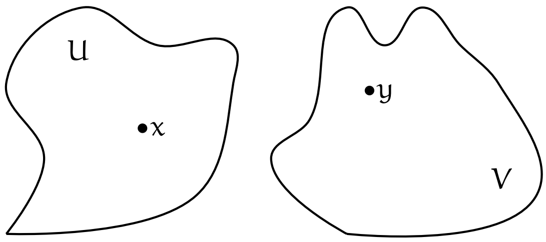
die **offene Kugel** mit Mittelpunkt a und Radius r. Für $x \in X$ heißt $U \subset X$ eine **Umgebung** von x, wenn ein $r > 0$ mit $U_r(x) \subset U$ existiert.

(4) Beispiele.

- Seien $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum, $a \in V$, und $r > 0$. Dann ist $U_r(a) = \{a + rx : \|x\| < 1\} = a + rU_1(0)$. Alle offenen Kugeln gehen also durch Streckung (bzw. Stauchung) und Translation aus der **Einheitskugel** $U_1(0)$ hervor.
- In $(V, \|.\|) = (\mathbb{R}, |.|)$ ist $U_r(a) =]a - r, a + r[$ ist das offene Intervall um a der Länge $2r$.
- In $(V, \|.\|) = (\mathbb{C}, |.|)$ ist $U_r(a)$ ist die offene Kreisscheibe um a mt Radius r.
- In $(V, \|.\|) = (\mathbb{R}^3, \|.\|_2)$ ist $U_r(a)$ die offene Kugel (ohne Oberfläche) um a mit Radius r.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeichne $U_1(0)$ in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der von $\|.\|_p$ für $p = 1, \infty, 2, \frac{3}{2}$ und 4 erzeugten Metrik.

(5) Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann haben je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen, d.h. $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ $\exists$ Umgebung U von x, Umgebung V von y: $U \cap V = \emptyset$.*



Beweis. Setze $r := \frac{1}{2}d(x, y) > 0$, $U := U_r(x)$ und $V := U_r(y)$. Für ein beliebiges $z \in U$ gilt dann: $2r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + d(z, y) \implies d(z, y) > r \implies z \notin V$. □

(6) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **offen**, falls U Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h.

$$\forall x \in U\ \exists r > 0 : \quad U_r(x) \subset U.$$

Beispiele.

- Ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist offen genau dann, wenn es im Sinne von (6) offen ist.
- Allgemeiner sind offene Kugeln $U_r(a)$ im Sinne (6) offen, denn ist $x \in U_r(a)$, dann ist $\epsilon := r - d(x, a) > 0$ und $U_\epsilon(x) \subset U_r(a)$. In der Tat gilt: $y \in U_\epsilon(x) \implies d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \epsilon = r \implies y \in U_r(a)$.
- Offenheit einer Menge hängt von der Metrik ab. Bei der diskreten Metrik ist jede Teilmenge offen, weil $U_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$ für jedes x.

- $[0,1]$ in $(\mathbb{R},|.|)$ ist nicht offen, wohl aber ist $[0,1]$ in $([0,1],d_{[0,1]})$ offen.

(7) Satz. *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum und* $\tau := \{U \subset X : U$ *offen* $\}$*. Dann ist* τ *eine Topologie. D.h. es gelten:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$. *D.h.* $\emptyset$ *und* X *sind offen.*

(ii) $\mathcal{F} \subset \tau$ *endlich* $\Longrightarrow \bigcap \mathcal{F} \in \tau$. *D.h. der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

(iii) $\mathcal{F} \subset \tau \Longrightarrow \bigcup \mathcal{F} \in \tau$. *D.h. die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

Beweis. (i) ist klar. — (ii) Es genügt zu zeigen, dass $U \cap V \in \tau$ für $U, V \in \tau$. Sei dazu $x \in U \cap V$. Dann existieren $r_1 > 0$ mit $U_{r_1}(x) \subset U$ und $r_2 > 0$ mit $U_{r_2}(x) \subset V$. Setze $r := \min\{r_1, r_2\}$. Dafür ist $U_r(x) \subset U_{r_i}(x)$ für $i = 1,2$ und somit $U_r(x) \subset V$. — (iii) Sei $V := \bigcup \mathcal{F}$ und $x \in V$. Dann existiert $U \in \mathcal{F}$ mit $x \in U$. Dazu existiert $r > 0$ mit $U_r(x) \subset U$. Somit ist $U_r(x) \subset V$. □

(8) Definition. Im metrischen Raum (X,d) heißt $A \subset X$ **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

(9) Satz. *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum. Dann gilt:*

(i) $\emptyset$ *und* X *sind abgeschlossen.*

(ii) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

(iii) *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis. Folgt sofort aus (7). □

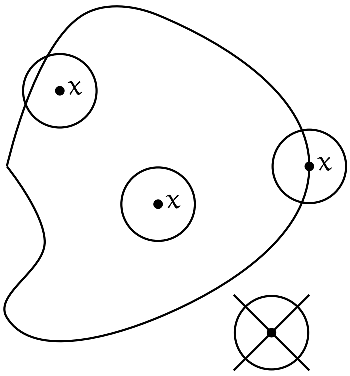
(10) Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann heißt $\tilde{U}_r(a) := \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$ für $a \in X$ und $r > 0$ die **abgeschlossene Kugel um a mit Radius r**.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige: $\tilde{U}_r(a)$ ist abgeschlossen im Sinne von (8) .

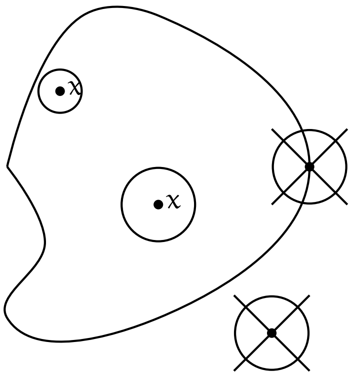
$\boxed{\text{Üb}}$ Gebe jeweils ein Beispiel von abzählbar vielen offenen Mengen (U_n) und abgeschlossenen Mengen (A_n) eines metrischen Raumes an derart, dass $\bigcap_n U_n$ nicht offen und $\bigcup_n A_n$ nicht abgeschlossen ist.

(11) Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt $x \in X$ ein **Berührpunkt** von A, wenn für alle Umgebungen U von x gilt:

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

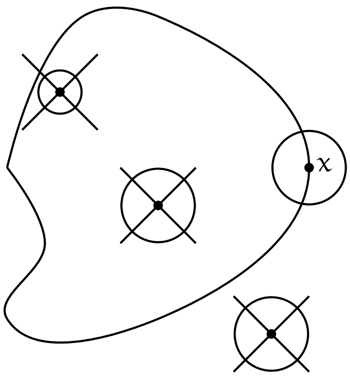


Die Menge $\overline{A} := \{x \in X : x \text{ ist Berührpunkt von } A\}$ heißt der **Abschluss** von A. Weiter heißt $x \in A$ ein **innerer Punkt** von A, wenn A eine Umgebung von x ist.



Die Menge $\overset{\circ}{A} := \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$ heißt das **Innere** von A. Schließlich heißt $x \in X$ ein **Randpunkt** von A, wenn für alle Umgebungen U xon x gilt:

$$U \cap A \neq \emptyset \quad \textbf{und} \quad U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$



Die Menge $\partial A := \{x \in X : x \text{ ist Randpunkt von } A\}$ heißt **Rand** von A.

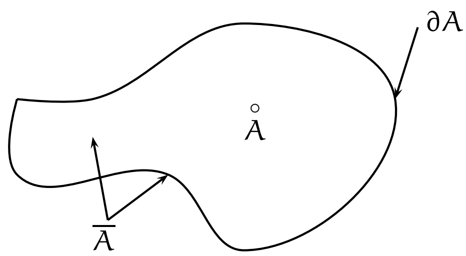
(12) Satz. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $A \subset X$. *Dann gelten:*

(i) $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$

(ii) $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

(iii) $\partial \complement A = \partial A, \quad \overline{\complement A} = \complement \mathring{A}, \quad \mathring{\overline{\complement A}}$

Beweis. (i) folgt sofort aus der Definition. — (ii) Sei $x \in \partial A$. Dann ist $x \in \overline{A}$, denn $U \cap A \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von x. Auch ist $x \notin \mathring{A}$, da sonst $\mathring{A}$ eine Umgebung des Randpunktes x wäre mit $\mathring{A} \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Also ist $x \in \overline{A} \setminus \mathring{A}$. Sei nun umgekehrt $x \in \overline{A} \setminus \mathring{A}$. Dann gilt für alle Umgebungen U von x: $U \cap A \neq \emptyset$ (da $x \in \overline{A}$) und $U \not\subset A$ (da $x \notin \mathring{A}$ kein innerer Punkt von A ist). $U \not\subset A$ heißt $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Also ist $x \in \partial A$.



$\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$
ist eine disjunkte Vereinigung

(iii) $\partial \complement A = \partial A$ folgt sofort aus der Definition des Randes. — $x \in \complement \mathring{A} \iff x \notin \mathring{A} \iff \forall$ Umgebung U von x: $U \not\subset A$, d.h. $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \iff x \in \overline{\complement A}$. — Die letzte Behauptung beweist man analog oder indem man A durch $\complement A$ ersetzt. $\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ Man beweise $\mathring{A} = A \setminus \partial A$, $\overline{A} = A \cup \partial A$ und $\complement \mathring{A} = \complement \overline{A}$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Seien (X, d) gleich $\mathbb{R}$ mit der euklidschen Metrik, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A \subset \mathbb{R}$ mit $]a, b[\subset A \subset [a, b]$. Man zeige: $\partial A = \{a, b\}$, $\mathring{A} =]a, b[$ und $\overline{A} = [a, b]$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige: $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Seien $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum, $a \in V$ und $r > 0$. Man zeige: $\{x \in V : \|x - a\| = r\} = \tilde{U}_r(a) \setminus U_r(a) = \partial U_r(a) = \partial \tilde{U}_r(a)$ und $\tilde{U}_r(a) = \overline{U_r(a)}$.

(13) Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:*

(i) *$\mathring{A}$ ist offen. Ist $U \subset A$, U offen, dann ist $U \subset \mathring{A}$. Also ist*

$$\mathring{A} = \bigcup \{U : U \subset A, \ U \textit{ offen}\}$$

die größte offene Menge, die in A enthalten ist. Insbesondere gilt: A offen $\iff A = \mathring{A}$.

(ii) $\overline{A}$ *ist abgeschlossen. Ist* $C \supset A$*,* C *abgeschlossen, dann ist* $C \supset \overline{A}$*. Also ist*

$$\overline{A} = \bigcap\{C : C \supset A,\ C \text{ abgeschlossen }\}$$

die kleinste abgeschlossene Menge, die in A *enthält. Insbesondere gilt:* A *abgeschlossen* $\iff A = \overline{A}$*.*

(iii) ∂A *ist abgeschlossen.*

Beweis. (i) Sei $x \in \overset{\circ}{A}$. Nach Definition von $\overset{\circ}{A}$ existiert U offen mit $x \in U \subset A$. Alle $y \in U$ sind innere Punkte von A. Daher ist $U \subset \overset{\circ}{A}$. Also ist $\overset{\circ}{A}$ offen. — (ii) Nach (i) und (12)(iii) ist $\complement\overline{A} = \complement\overset{\circ}{A} = \bigcup\{U : U \subset \complement A,\ U \text{ offen }\} = \bigcup\{\complement C : \complement C \subset \complement A,\ C \text{ abgeschlossen}\} = \bigcup\{\complement C : C \supset A,\ C \text{ abgeschlossen}\}$. Daher ist $\overline{A} = \bigcap\{C : C \supset A,\ C \text{ abgeschlossen}\}$. — (iii) $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \underbrace{\overline{A}}_{\text{abgeschlosssen}} \cap \underbrace{(X \setminus \underbrace{\overset{\circ}{A}}_{\text{offen}})}_{\text{abgeschlossen}}$ ist abgeschlossen. □

(14) Definition und Satz. *Seien* (X, d^X) *und* (Y, d^Y) *metrische Räume. Dann ist*

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R},\ d((x, y), (x, y)) := \max\{d^X(x, y), d^Y(x, y)\}$$

eine Metrik auf $X \times Y$*, die* ***Maximummetrik****, und* $(X \times Y, d)$ *ist ein metrischer Raum, der* ***Produktraum****. Die offenen Kugeln im Produktraum sind das Produkt von offenen Kugel in den Faktorräumen,* denn $U_r(a, b) = \{(x, y) \in X \times Y : d((x, y), (a, b)) < r\} = \{(x, y) \in X \times Y : d^X(x, a) < r,\ d^Y(y, b) < r\} = U_r(a) \times U_r(b)$. *Entsprechendes gilt für die abgeschlossenen Kugeln:* $\tilde{U}_r(a, b) = \tilde{U}_r(a) \times \tilde{U}_r(b)$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige: Die Maximummetrik d in (14) ist tatsächlich eine Metrik.

(15) Satz. *Unter den Voraussetzungen aus* (14) *gelten:* $U \subset X$ *offen,* $V \subset Y$ *offen* $\Longrightarrow U \times V$ *offen in* $X \times Y$*;* $A \subset X$ *abgeschlossen,* $B \subset Y$ *abgeschlossen* $\Longrightarrow A \times B$ *abgeschlossen in* $X \times Y$*.*

Beweis. $(x, y) \in U \times V \Longrightarrow x \in U,\ y \in V \Longrightarrow \exists r_1, r_2 > 0 : U_{r_1}(x) \subset U,\ U_{r_2}(y) \subset V$, $r := \min\{r_1, r_2\} > 0 \Longrightarrow U_r(x, y) \overset{(14)}{=} U_r(x) \times U_r(y) \subset U \times V$. Daher ist $U \times V$ ist offen. — $(X \times Y) \setminus (A \times B) = \underbrace{(\underbrace{(X \setminus A)}_{\text{offen}} \times \underbrace{Y}_{\text{offen}})}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(\underbrace{X}_{\text{offen}} \times \underbrace{(Y \setminus B)}_{\text{offen}})}_{\text{offen}}$ ist offen. Daher ist $A \times B$ abgeschlossen. □

(16) Verallgemeinerung auf endlich viele Faktoren. Seien (X_i, d_i) metrische Räume für $i = 1, \ldots, m$, $X := \prod_{i=1}^m X_i := X_1 \times \ldots \times X_m$. Dann definiert $d(x, x') := \max\{d_i(x_i, x_i') : i = 1, \ldots, m\}$, eine Metrik auf X, die **Maximummetrik**. Dafür gelten: $U_i \subset X_i$ offen für $i = 1, \ldots, m$ $\Longrightarrow U := \prod_{i=1}^m U_i \subset X$ offen; $A_i \subset X_i$ abgeschlossen für $i = 1, \ldots, m \Longrightarrow A := \prod_{i=1}^m A_i \subset X$ abgeschlossen.

Beispiel. Seien $X_i = \mathbb{K}$, d_i die Betragsmetrik für $i = 1, \dots, m$ und $X := \mathbb{K}^m$. Dann ist $d(x, x') := \max\{|x_i - x'_i| : i = 1, \dots, m\} = \|x - x'\|_\infty$. Die Maximummetrik wird also von der Maximumnorm erzeugt. Für $X_i = \mathbb{R}$ ist der offene achsenparallele Quader $\prod_{i=1}^m]a_i, b_i[$ eine offene Menge im Produktraum $\mathbb{R}^m$. Entsprechend ist $\prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ abgeschlossen.

Die Produktabbildung ist assoziativ, d.h.

$$(X_1 \times X_2) \times X_3 = X_1 \times (X_2 \times X_3) = X_1 \times X_2 \times X_3.$$

(17) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt **konvergent**, wenn $a \in X$ existiert mit

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0.$$

(D.h. $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : d(x_n, a) < \epsilon$.) Man schreibt dann $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ oder $x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige die Eindeutigkeit des Grenzwertes mit Hilfe der Dreiecksungleichung.

Falls d von einer Norm erzeugt wird, d.h. $d(x, y) = \|x - y\|$, dann erhält man die bekannte Definition der Konvergenz im normierten Raum.

(18) Satz. *Seien* (X_i, d_i) *metrische Räume,* $X := \prod_{i=1}^m X_i$ *der Produktraum mit der Maximummetrik* d, (x_n) *eine Folge in* X *und* $a \in X$. *Dann gilt:*

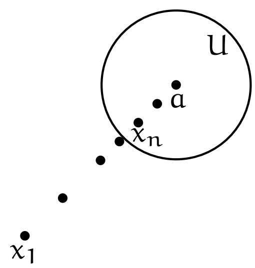
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff \lim_{n \to \infty} x_{ni} \ \forall i = 1, \dots, m$$

Beweis. $d(x_n, a) \to 0 \iff \max_{i=1,\dots,n} d_i(x_{ni}, a_i) \to 0 \iff d_i(x_{ni}, a_i) \to 0$ für jedes $i = 1, \dots, m$. $\square$

D.h. die Folge (x_n) in X konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Komponenten $(x_{ni})_n$ für $i = 1, \dots, m$ konvergieren. Insbesondere gilt dies für die Folgen in

$$(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty) = \prod_{i=1}^m (\mathbb{K}, |.|).$$

(19) Satz. *Seien* (X, d) *ein metrischer Raum,* (x_n) *in* X *und* $a \in X$. *Dann gilt:* $x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \iff$ $\forall$ *Umgebung* U *von* a $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : x_n \in U$.

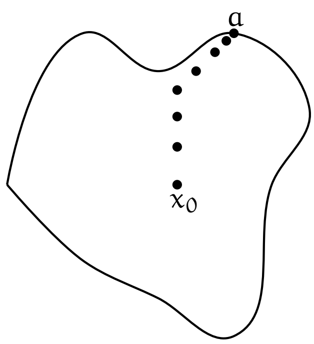


Beweis. Nach Definition gilt: $x_n \to a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n \in U_\epsilon(a)$. Damit folgt $'' \Longleftarrow''$, indem man $U = U_\epsilon(a)$ wählt. Zu $'' \Longrightarrow''$ ist nur zu beachten, dass jede Umgebung U von a eine ϵ-Kugel $U_\epsilon(a)$ enthält. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in U_\epsilon(a)$ für alle $n \geq N$. $\square$

Also wird die Konvergenz einer Folge im metrischen Raum lediglich von den Umgebungen und daher letztlich nur von den offenen Mengen, d.h. der Topologie bestimmt. Es kann sein, dass zwei verschiedene Metriken d_1 und d_2 auf derselben Menge X existieren, die die gleiche Topologie definieren. Wir kommen darauf zurück.

(20) Satz. *Seien* (X, d) *ein metrischer Raum und* $A \subset X$. *Dann gilt:*

$$\overline{A} := \{a \in X : \exists (x_n) \text{ in } A \text{ mit } x_n \to a\}.$$



Beweis. $'' \subset''$: $a \in \overline{A} \Longrightarrow U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset\ \forall n \Longrightarrow \exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a),\ x_n \in A \Longrightarrow (x_n)$ in A und $d(x_n, a) < \frac{1}{n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, also $x_n \to a$. — $'' \supset''$: Sei (x_n) in A mit $x_n \to a$ und U eine Umgebung von a. Dann existiert $x_n \in U$, weshalb $U \cap A \neq \emptyset$. Da U beliebig ist, folgt $a \in \overline{A}$. $\square$

(21) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $A \subset X$ heißt **beschränkt**, falls $A = \emptyset$ oder

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} < \infty.$$

$\operatorname{diam} A$ heißt der **Durchmesser** von A. So ist z.B. $\operatorname{diam} U_r(a) \leq 2r$ und $\operatorname{diam} \tilde{U}_r(a) \leq 2r$.

Seien $A \subset X$ beschränkt, $x,\ y \in A$ und $c \in X$. Dann gilt: $d(c, x) \leq d(c, y) + d(y, x) \leq d(c, y) + \operatorname{diam} A \Longrightarrow \sup\{d(c, a) : a \in A\} < \infty$. — Seien umgekehrt $x,\ y \in A$, $c \in X$ und $s := \sup\{d(c, a) : a \in A\} < \infty$. Dann gilt: $d(x, y) \leq d(x, c) + d(c, y) \leq 2s \Longrightarrow A$ beschränkt. — Damit ist gezeigt:

(22) Lemma. *Seien* (X, d) *ein metrischer Raum,* $\emptyset \neq A \subset X$ *und* $c \in X$. *Dann gilt:*

$$A \text{ beschränkt } \Longleftrightarrow \sup\{d(c, a) : a \in A\} < \infty.$$

In einem normierten Raum ist A genau dann beschränkt, wenn $A \subset U_r(0)$ für ein $r > 0$. — Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum heißt **beschränkt**, wenn $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

(23) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt **Cauchy Folge** (CF), wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n, m \geq N :\ d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

(X, d) heißt **vollständig**, wenn jede CF in X konvergiert.

Ist $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum versehen mit der von der Norm erzeugten Metrik, dann stimmen die Definitionen (23) und (10.4) der Vollständigkeit für V offensichtlich überein.

(24) Lemma. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Jede konvergente Folge ist CF. Jede CF ist beschränkt.*

Beweis. Sei (x_n) konvergent mit $a := \lim x_n$. Dann gilt: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \ d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Daher ist $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \epsilon\ \forall n, m \geq N$. Also ist (x_n) ist eine CF. — Sei nun (x_n) eine CF. Dann gilt: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N : \ d(x_n, x_m) < 1 \implies \forall k \in \mathbb{N} : d(x_N, x_k) \leq \max\{1, d(x_N, x_1), \dots, d(x_N, x_{N-1})\}$. Daher ist $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. □

(25) Satz. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $Y \subset X$. *Dann gelten:*

(i) (Y, d_Y) *vollständig* $\implies Y$ *abgeschlossen in* X.

(ii) (X, d) *vollständig,* Y *abgeschlossen in* $X \implies (Y, d_Y)$ *vollständig.*

Beweis. (i) Wir zeigen $Y = \overline{Y}$ mit Hilfe von (20). Sei also (y_n) in Y mit $y_n \to a$. Zu zeigen ist $a \in Y$. Nach (24) ist (y_n) CF in X und somit auch CF in (Y, d_Y). Damit existiert $b \in Y$ mit $y_n \to b$. Weil der Grenzwert eindeutig ist, ist $a = b$. Also ist $a \in Y$.

(ii) Sei (y_n) eine CF in Y. Dann ist (y_n) auch CF in X. Daher existiert $a \in X$ mit $y_n \to a$. Weil Y abgeschlossen ist, ist $a \in Y$ nach (20). Also konvergiert (y_n) in Y. Daher ist (Y, d_Y) vollständig.

□

(26) Bemerkung. Nach (10.5) ist $(B(X), \|.\|_s)$ ein Banachraum. Daher ist $(\mathbb{C}^n, \|.\|_\infty)$ Banachraum, weil dieser gleich $(B(\{1, \dots, n\}), \|.\|_s)$ ist. Weiter sei an die folgenden Untervektorräume von $B[a, b]$ erinnert: $T[a, b] \subset R[a, b] \subset B[a, b]$ und $C[a, b] \subset R[a, b]$. Siehe dazu (9.16) und die Bemerkungen nach (9.11).

(27) Satz. *Die Vektorräume* $C[a, b]$ *und* $R[a, b]$ *sind bez.* $\|.\|_s$ *vollständig, also Banachräume. Sie sind Untervektorräume von* $(B[a, b], \|.\|_s)$. *Weiter ist* $\overline{T[a, b]} = R[a, b]$ *bez.* $\|.\|_s$. — *Sei* $D \subset \mathbb{C}$ *beliebig. Dann ist* $C(D) \cap B(D) = \{f : D \to \mathbb{C} : f$ *beschränkt und stetig*$\}$ *ein vollständiger Untervektorraum von* $(B(D), \|.\|_s)$. *Für* $D = [a, b]$ *gilt* $C[a, b] \subset B[a, b]$.

Beweis. $C(D) \cap B(D)$ ist offenbar ein Vektorraum. Er ist abgeschlossen in $B(D)$. Zum Beweis sei $f \in B(D)$ und (f_n) eine Folge in $C(D) \cap B(D)$ mit $f_n \to f$ in $B(D)$, d.h. $\|f_n - f\|_s \to 0$. Das bedeutet, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen ist stetig (9.8). Also ist $f \in C(D) \cap B(D)$. Damit ist $C(D) \cap B(D)$ abgeschlossen nach (13)(ii) und (20). Nach (25)(ii) ist $C(D) \cap B(D)$ vollständig.

Sei $D = [a, b]$ und $f \in C[a, b]$. Dann ist $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und daher $|f|$ nach (7.16) beschränkt, d.h. $f \in B[a, b]$. Also ist $C[a, b] \subset B[a, b]$ und somit $C[a, b]$ nach obigem Ergebnis vollständig bezüglich $\|.\|_s$. Nach Definition von $R[a, b]$ und wegen (20) ist $R[a, b] = \overline{T[a, b]}$ bez. $\|.\|_s$. Nach (13)(ii) und (25)(ii) ist $R[a, b]$ abgeschlossen und damit vollständig. □

(28) Definition. Seien (X, d), (Y, d) metrische Räume, $D \subset X$, $f : D \to Y$ und $a \in \overline{D}$. Dann hat f einen **Grenzwert in** a, wenn $b \in Y$ existiert derart, dass

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \text{ mit } d(x, a) < \delta : \ d(f(x), b) < \epsilon.$$

Offenbar ist $b \in Y$ eindeutig. Man schreibt $b = \lim_{x \to a} f(x)$ oder auch $f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} b$.

(29) Satz. ***Folgenkriterium.*** *Seien f und a wie in (28). Dann hat f einen Grenzwert in a genau dann, wenn ein $b \in Y$ existiert derart, dass für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ folgt, dass $f(x_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} b$.*

Beweis. Da $a \in \overline{D}$ ist, existiert nach (20) eine Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$.

$'' \Longrightarrow''$: Sei b wie in (28) und (x_n) in D mit $x_n \longrightarrow a$. Zu zeigen ist $f(x_n) \longrightarrow b$. Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ sei $\delta > 0$ aus (28). Da $d(x_n, a) \longrightarrow 0$, existiert $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, a) < \delta \ \forall n \geq N$. Dann gilt auch $d(f(x_n), b) < \epsilon \ \forall n \geq N$. Also ist $f(x_n) \longrightarrow b$ gezeigt.

$'' \Longleftarrow''$: Angenommen es gilt $f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} b$ nicht. Nach (28) existiert dann ein $\epsilon_0 > 0$ derart, dass es zu $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in D$ gibt mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ und $d(f(x_n), b) \geq \epsilon_0$. Dies gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aus $d(x_n, a) < \frac{1}{n} \ \forall n$ folgt $x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Da $d(f(x_n), b) \geq \epsilon_0 \ \forall n$, konvergiert aber $(f(x_n))$ nicht gegen b. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

(30) Definition. Seien $(X, d), (Y, d)$ metrische Räume, $D \subset X$, $f : D \to Y$ und $a \in D$. Dann heißt f **stetig** in a, wenn

$$f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} f(a),$$

d.h. wenn $f(a)$ der Grenzwert von f in a ist gemäß (28).

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige: Die Abbildung f aus (30) ist stetig in a genau dann, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ einer jeden Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung von a ist.

(31) Stetigkeit und stetige Fortsetzung. Seien (X, d), (Y, d) metrische Räume, $D \subset X$, $f : D \to Y$ und $a \in \overline{D}$, $b \in Y$. Definiere

$$g : D \cup \{a\} \to Y, \ g(x) := f(x) \ \forall x \neq a, \ g(a) := b.$$

Nach (28) und (30) gilt dann:

$$g \text{ stetig in } a \Longleftrightarrow f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} b.$$

Daraus läßt sich Folgendes schließen. Im Fall $a \in D$ ist f stetig in a genau dann, wenn $f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$. Im Fall $a \in \overline{D} \setminus D$ hingegen existiert genau dann eine stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{a\}$, wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) =: b$ existiert, und $f(a) := b$ ist die eindeutige stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{a\}$.

(32) Seien (X, d), (Y, d), (Z, d) metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig in a und $g : Y \to Z$ stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a. Vgl. (7.8).

Beweis. Wende das Folgenkriterium (29) an. Sei (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to a$. Dann ist $(f(x_n))$ eine Folge in Y mit $f(x_n) \to f(a)$. Daher gilt $g \circ f(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(a)) = g \circ f(x_n)$. $\square$

(33) Satz. *Seien* (X, d) *und* (Y_i, d_i), $i = 1, \dots, m$ *metrische Räume,* $Y := \prod_{i=1}^m (Y_i, d_i)$ *der Produktraum mit der Maximummetrik* (14) *und* $f_i : X \to Y_i$ *Abbildungen. Setze*

$$f : X \to Y,\ f(x) := (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Dann gilt: f *stetig in* $a \iff f_i$ *stetig in* $a\ \forall i$.

Beweis. Sei (x_n) Folge in X mit $x_n \to a$. Nach (18) gilt: $f(x_n) \to f(a) \iff f_i(x_n) \to f_i(a)\ \forall i$. Wende nun das Folgenkriterium (29) an. $\square$

Bemerkung. Man schreibt $f = (f_1, \dots, f_m)$ und nennt f_i die i-te Komponentenabbildung von f. Ein wichtiger Spezialfall von (33) ist $(Y_i, d_i) = \mathbb{K}$ mit der Abstandsmetrik und $Y = (\mathbb{K}^m, \|.\|_\infty)$.

(34) Satz. *Rechenoperationen.* *Die folgenden Abbildungen von* $(\mathbb{K}^2, \|.\|_\infty)$ *nach* $(\mathbb{K}, |.|)$ *sind stetig:*

- $(x, y) \mapsto (x + \lambda y)$ *für* $\lambda \in \mathbb{K}$
- $(x, y) \mapsto (xy)$
- $\{(x, y) : y \neq 0\} \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.

Beweis. Sei $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ und $(x_n, y_n) \to (a, b)$. Dann konvergieren $x_n \to a$ und $y_n \to b$ nach (18). Gemäß (5.4) gilt damit $x_n + \lambda y_n \to a + \lambda b$, u.s.w. $\square$

(35) Satz. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum,* $\lambda \in \mathbb{K}$ *und* $f, g : X \to \mathbb{K}$ *stetig in* $a \in X$. *Dann sind* $f + \lambda g$, fg *und* $\frac{f}{g}$ *(im Fall* $g(x) \neq 0\ \forall x$*) stetig in* a.

Beweis. Es ist $X \to \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, $x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + \lambda g(x)$. Also ist $f + \lambda g$ Komposition stetiger Abbildungen in a bzw. $(f(a), g(a))$. Nach (32) ist daher $f + \lambda g$ stetig in a. Analog beweist man die übrigen Behauptungen. $\square$

(36) Beispiele stetiger Funktionen.

- Die **konstante** Funktion $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$, $x \mapsto a$, ist stetig.
- Die **Projektion** auf die i-te Komponente $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x_i$, ist stetig.
- Die **Monomfunktionen** $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$, sind stetig. Dabei heißt $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ ein **Multiindex**.

- Sei $I \subset \mathbb{N}_0^m$ eine endliche Menge von Multiindizes und $c_\alpha \in \mathbb{K}$ für $\alpha \in I$. Dann ist die **Polynomfunktion** $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \sum_{\alpha\in I} c_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha\in I} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ stetig.
  Setze $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. Dann heißt $N := \max\{|\alpha| : \alpha \in I, c_\alpha \neq 0\}$ der **Grad** des Polynoms, sofern es nicht das Nullpolynom ist.

- Jede **lineare Abbildung** $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ ist stetig, denn die j-ten Komponentenfunktionen $f_j(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} x_k$, $j = 1, \dots, l$, sind stetig. Dabei ist $A = (\alpha_{jk})_{jk}$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^l$.

(37) Lemma. *Ist* (X, d) *ein metrischer Raum, dann gilt* $|d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z)\ \forall x,y,z \in X$. *Ist* $(V, \|.\|)$ *ein normierter Raum, dann gilt* $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|\ \forall x,y \in V$.

Beweis. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y) \Longrightarrow d(x,y)-d(y,z) \leq d(x,z)$. Vertauscht man x mit z, so folgt auch $d(z,y)-d(x,y) \leq d(z,x)$. Insgesamt folgt die Behauptung. — Im normierten Raum erhält man für $y = 0$: $d(x,0) = \|x\|$ und $d(0,z) = \|z\|$ und daher $|\|x\| - \|z\|| \leq d(x,z) = \|x-z\|$. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige: $d : X \times X \to \mathbb{R}$ und $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ sind stetig, sogar Lipschitz stetig.

(38) Satz. *Seien* $(V, \|.\|)$, $(W, \|.\|)$ *normierte Räume und* $f : V \to W$ *linear. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist stetig.*

(ii) f *ist stetig in* 0.

(iii) $\exists\, c \geq 0$ *mit* $\|f(x)\| \leq c\|x\|\ \ \forall x \in V$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) ist klar. — Zu (ii)$\Longrightarrow$(iii) beachte, dass $\delta > 0$ existiert derart, dass $\|f(x) - f(0)\| \leq 1$ falls $\|x - 0\| \leq \delta$. Nun ist $f(0) = 0$, weil f linear ist. Also gilt $\|f(x)\| \leq 1\ \forall x \in X$ mit $\|x\| \leq \delta$. Sei nun $x \in V$, $x \neq 0$. Dann ist $\left\|\frac{\delta}{\|x\|}x\right\| = \frac{\delta}{\|x\|}\|x\| = \delta$, weshalb $\left\|f\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right\| \leq 1$. Da $\left\|f\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right\| = \left\|\frac{\delta}{\|x\|}f(x)\right\| = \frac{\delta}{\|x\|}\|f(x)\|$, folgt $\|f(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|$, was auch für $x = 0$ gilt. — Zum Beweis von (iii) $\Longrightarrow$ (i) sei $a \in V$ und (x_k) in V mit $x_k \longrightarrow a$. Dann gilt: $\|f(x_k) - f(a)\| = \|f(x_k - a)\| \leq c\|x_k - a\| \longrightarrow 0$. Gemäß dem Folgenkriterium (29) ist f daher stetig in a. □

(39) Beispiel. $V = C[a,b]$ wird mit der Supremumsnorm $\|.\|_s$ versehen. Eine weitere Norm auf V ist

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|dt,$$

denn offenbar gelten

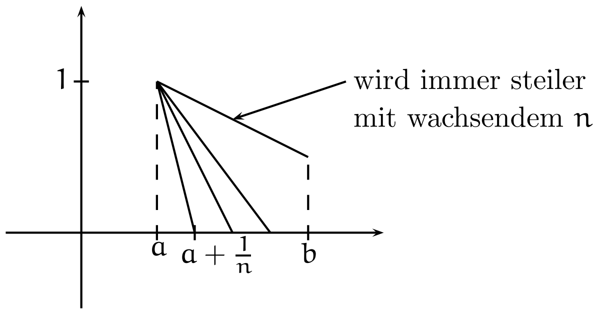
- $\|f\|_1 \geq 0$.
- $\|\alpha f\|_1 = \int_a^b |\alpha f(t)|dt = |\alpha|\|f\|_1$.

- $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|dt \leq \int(|f(t)|+|g(t)|dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$.
- Es bleibt die Definitheit nachzuprüfen. Dazu sei $\|f\|_1 = 0$. Angenommen $f \neq 0$. Dann existiert $t_0 \in [a,b]$ mit $f(t_0) \neq 0$. Weil f stetig ist, existiert nach (7.4) ein $\delta > 0$ mit $|f(t)| \geq \frac{1}{2}|f(t_0)|$ $\forall t \in [a,b] \cap [t_0-\delta, t_0+\delta]$. Damit ist $\int_a^b |f(t)|dt \geq \frac{1}{2}|f(t_0)|l > 0$, wobei l die Länge des Intervalls $[a,b] \cap [t_0-\delta, t_0+\delta] > 0$ bezeichnet. Dies ist ein Widerspruch.

(a) $T : V \to \mathbb{C}$, $T(f) := \int_a^b f(t)dt$, ist linear, weil das Integral linear ist. T ist stetig bezüglich beider Normen nach (38)(iii), denn

$$|T(f)| = \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1,$$
$$|T(f)| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq (b-a)\|f\|_s.$$

(b) $T : V \to \mathbb{C}$, $T(f) := f(a)$ ist offensichtlich linear. T ist stetig bezüglich $\|.\|_s$, denn $|T(f)| = |f(a)| \leq \|f\|_s$. T ist nicht stetig bez. $\|.\|_1$, denn für $f_n(t) := \max\{0, 1-n(t-a)\}$ gilt:



$f_n(a) = 1$ und somit $T(f_n) = 1$, aber $\|f_n\|_1$ (Fläche unterhalb des Graphen) $\leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Also ist (38)(iii) nicht erfüllt.

(40) Satz. *Seien* X, Y *metrische Räume und* $f : X \to Y$. *Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist stetig.*

(ii) $f^{-1}(V)$ *ist offen für jedes offene* $V \subset Y$.

(iii) $f^{-1}(A)$ *ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene* $A \subset Y$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): $V \subset Y$ offen, $x_0 \in f^{-1}(V) \Longrightarrow f(x_0) \in V$, V offen $\Longrightarrow \exists U_\epsilon(f(x_0)) \subset V \Longrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) :\ f(x) \in U_\epsilon(f(x_0))$ (weil f stetig in x_0 ist) $\Longrightarrow U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(V)$. Dies gilt für jedes $x_0 \in f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $x_0 \in X$, $\epsilon > 0 \Longrightarrow f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$ offen, $x_0 \in f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0))) \Longrightarrow \exists \delta > 0$: $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$. Damit gilt: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0)$: $f(x) \in U_\epsilon(f(x_0))$, d.h. dass $d(f(x), f(x_0) < \epsilon$ falls $d(x, x_0) < \delta$. Das ist die Stetigkeit von f in x_0. Dies gilt für jedes x_0. Also ist f stetig.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $A \subset Y$ abgeschlossen $\Longrightarrow Y \setminus A$ offen $\Longrightarrow f^{-1}(Y \setminus A)$ offen, $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ $\Longrightarrow f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Ist ebenso einfach. □

Beispiele. Sei X ein metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- $\{x \in X : f(x) < c\} = f^{-1}(\underbrace{]-\infty, c[}_{\text{offen}})$ ist offen.
- $\{x \in X : f(x) > c\} = f^{-1}(\underbrace{]c, \infty[}_{\text{offen}})$ ist offen.
- $\{x \in X : f(x) \leq c\} = f^{-1}(\underbrace{]-\infty, c]}_{\text{abgeschlossen}})$ ist abgeschlossen.
- $\{x \in X : f(x) \geq c\} = f^{-1}(\underbrace{[c, \infty[}_{\text{abgeschlossen}})$ ist abgeschlossen.
- $\{x \in X : f(x) = c\} = f^{-1}(\underbrace{\{c\}}_{\text{abgeschlossen}})$ ist abgeschlossen. Die Menge heißt **Niveaumenge** von f zum Niveau c.

14 Kompaktheit

(1) Definition. Seien X ein metrischer Raum, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X und $A \subset X$. Dann heißt $\mathcal{U}$ eine **offene Überdeckung** von A, wenn alle $U \in \mathcal{U}$ offen sind und wenn

$$A \subset \bigcup \mathcal{U} \quad \left(= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right).$$

Die Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt **endlich**, wenn $\mathcal{U}$ eine endliche Menge ist. Ist $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, dann heißt $\mathcal{V}$ eine **Teilüberdeckung** von A, wenn $A \subset \bigcup \mathcal{V}$.

Oft wird auch die Formulierung mit Familien benutzt: Eine Familie $(U_\iota)_{\iota \in I}$ offener Teilmengen von X heißt offene Überdeckung von A, wenn $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

(2) Definition. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$. A heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(3) Definition. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A **totalbeschränkt** oder **präkompakt**, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subset A$ existiert mit

$$A \subset \bigcup_{a \in F} U_\epsilon(a).$$

(4) Vorbereitungen. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$.

(i) Eine Folge (x_n) in A **konvergiert in** A, wenn ein $a \in A$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ existiert.

(ii) A heißt **vollständig**, wenn jede CF in A in A konvergiert, d.h. wenn (A, d_A) vollständig ist.

(iii) Eine Folge (x_n) in X hat einen **Häufungspunkt** $h \in X$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(h)\}$$

unendlich ist. *Es gilt:*

h *Häufungspunkt von* $(x_n) \iff \exists$ *Teilfolge* (x_{n_k}) *von* (x_n) *mit* $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h$.

Beweis. "$\Longrightarrow$": Seien $n_1, \dots, n_k$ so gewählt, dass $n_1 < \dots < n_k$ und $x_{n_j} \in U_{\frac{1}{j}}(h)$. Da $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_{\frac{1}{k+1}}(h)\}$ unendlich ist, existiert $n = n_{k+1}$ mit $n_k < n_{k+1}$ und $x_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(h)$. Damit ist eine Teilfolge von (x_k) mit $x_{n_{k+1}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h$ definiert. — "$\Longleftarrow$": $\forall\, \epsilon > 0$ $\exists\, K \in \mathbb{N}$ $\forall k \geq K$: $x_{n_k} \in U_\epsilon(h)$. Daher ist $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(h)\}$ unendlich. $\square$

(iv) *Sei* (x_n) *eine CF in* X, (x_{n_k}) *eine Teilfolge von* (x_n) *und* $h \in X$ *mit* $x_{n_k} \to h$. *Dann gilt* $x_n \to h$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. $\exists\, K \in \mathbb{N}\ \forall\, k \geq K$: $d(x_{n_k}, h) < \frac{\epsilon}{2}$. $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq N$: $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Weil $n_k \geq k$ nach (5.11) Bem. 2, gilt daher $\forall\, k \geq \max\{N, K\}$: $d(x_k, h) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, h) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. □

(v) *Sei* (x_n) *in* X *und* $r > 0$ *derart, dass* $d(x_n, x_m) \geq r \quad \forall\, n \neq m$. *Dann hat* (x_n) *keinen Häufungspunkt.*

Beweis. Anderenfalls existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $h \in X$ mit $x_{n_k} \to h$. Dann gilt: $\exists\, K \in \mathbb{N}\ \forall k \geq K$: $d(x_{n_k}, h) < \frac{r}{2} \implies d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, h) + d(h, x_{n_l}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ $\forall\, k, l \geq K$, was ein Widerspruch ist. □

(vi) A *totalbeschränkt* $\implies A$ *beschränkt.*

Beweis. Sei $F \subset A$ endlich mit $A \subset \bigcup_{a \in F} U_1(a)$. Dann existiert zu jedem $x \in A$ ein $a_x \in F$ mit $x \in U_1(a_x)$. Sei $a_0 \in F$. Dann gilt: $d(x, a_0) \leq d(x, a_x) + d(a_x, a_0) \leq 1 + \max\{d(a, a_0) : a \in F\}$. □

(vii) $V \subset A$ *offen in* $(A, d_a) \iff \exists\, U \subset X$ *offen mit* $V = U \cap A$.

Beweis. Für $a \in A$ und $r > 0$ gilt: Die offene Kugel in (A, d_A) um a mit Radius r ist $U_r^A(a) = \{x \in A : d_A(x, a) < r\} = \{x \in A : d(x, a) < r\} = U_r(a) \cap A$. Hieraus folgt die Behauptung. □

(viii) A *kompakt* $\iff (A, d_A)$ *kompakt.*

Beweis. Folgt sofort aus (2) und (vii). □

(5) Hauptsatz zur Kompaktheit in metrischen Räumen. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $A \subset X$. *Dann sind äquivalent:*

(i) A *ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge in* A *hat eine in* A *konvergente Teilfolge.*

(iii) A *ist totalbeschränkt und vollständig.*

Beweis. Nach der Vorbemerkung (4)(viii) sei o.E. $A = X$.

(i) $\implies$ (ii): Sei (x_n) eine Folge in X. Betrachte dazu

$$F_m := \overline{\{x_n : n \geq m\}},\ m \in \mathbb{N}.$$

Zunächst wird $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m \neq \emptyset$ gezeigt. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann ist $X = X \setminus \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (X \setminus F_m) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$, wobei $U_m := (X \setminus F_m)$ offen ist. Weil X kompakt ist, existieren $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ mit $X = U_{m_1} \cup \ldots \cup U_{m_k}$. Das bedeutet $F_{m_1} \cap \ldots \cap F_{m_k} = \emptyset$, was ein Widerspruch ist, denn für $m_0 := \max\{m_1, \ldots, m_k\}$ ist $F_{m_0} = F_{m_1} \cap \ldots \cap F_{m_k}$ und $F_{m_0} \neq \emptyset$. Also existiert ein $h \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$.

Sei nun $\epsilon > 0$. Da $h \in F_m$ folgt $\{x_n : n \geq m\} \cap U_\epsilon(h) \neq \emptyset$. Dies gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$. Daher ist $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(h)\}$ unendlich. Also ist h Häufungspunkt von (x_n). Damit gilt (ii).

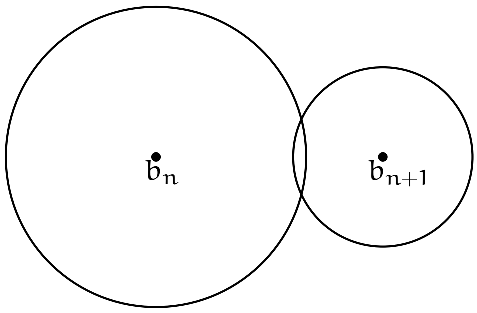
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sei (x_n) eine CF in x. Nach (ii) existiert ein $h \in X$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to h$. Nach (4)(iv) gilt $x_n \to h$. Also ist X vollständig.

Bleibt zu zeigen, dass X totalbeschränkt ist. Nehme das Gegenteil an. Dann existiert $r > 0$ derart, dass X keine endliche Überdeckung durch offene r-Kugeln besitzt. Damit wird induktiv eine Folge (x_n) wie folgt definiert. Seien $x_1, \dots, x_n$ bereits so gewählt, dass $d(x_i, x_j) \geq r \ \forall i \neq j$. Da $X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_r(x_i) \neq \emptyset$, existiert $x_{n+1} \in X$ mit $d(x_i, x_{n+1}) \geq r \ \forall i = 1, \dots, n$. Nach der Vorbemerkung (4)(v) hat (x_n) keinen Häufungspunkt. Dies ist ein Widerspruch zu (ii) nach (4)(iii). Also ist X totalbeschränkt.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Angenommen X ist nicht kompakt. Dann existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X ohne eine endliche Teilüberdeckung von X. Da X totalbeschränkt ist, gibt es endlich viele offene Kugeln mit Radius 1, die X überdecken. Darunter gibt es (mindestens) eine $B_1 := U_1(b_1)$, die nicht von endlich vielen der $U \in \mathcal{U}$ überdeckt wird.

Ebenso gibt es endlich viele offene Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$, die X überdecken. Betrachte davon diejenigen Kugeln B mit $B \cap B_1 \neq \emptyset$. Diese überdecken B_1. Daher gibt es mindestens eine $B_2 := U_{\frac{1}{2}}(b_2)$ die nicht von endlich vielen der $U \in \mathcal{U}$ überdeckt wird. U.s.w.

Induktiv erhält man so die Folge (b_n) der Mittelpunkte. Hiefür gilt $d(b_n, b_{n+1}) < 2^{-n} + 2^{-n-1} < 2^{-n+1}$, weil $B_n \cap B_{n+1} \neq \emptyset$.



Daraus folgt, dass (b_n) eine CF ist, denn für $n > m \geq N$ ist $d(b_m, b_n) \leq d(b_m, b_{m+1}) + d(b_{m+1}, b_{m+2}) + \ldots + d(b_{n-1}, b_n) \leq 2^{-m+1} + 2^{-m+2} + \ldots + 2^{-(n-1)+1} \leq \sum_{k=N}^\infty 2^{-k+1} = 2^{-N+2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Da X vollständig ist, existiert $b \in X$ mit $b_n \to b$. Dazu existiert $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $b \in U_0$. Sei $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(b) \subset U_0$. Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N} < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(b_N, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für $x \in U_{2^{-N}}(b_N) : d(x, b) \leq d(x, b_N) + d(b_N, b) < 2^{-N} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Daher ist $B_N = U_{2^{-N}}(b_N) \subset U_\epsilon(b) \subset U_0$, im Widerspruch dazu, dass B_N nicht von endlich vielen $U \in \mathcal{U}$ überdeckt wird. $\square$

(6) Korollar. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt: A kompakt $\Longrightarrow$ A beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. A ist totalbschränkt nach (5) und somit beschränkt nach (4)(vi). Weiter ist A vollständig nach (5) und somit abgeschlossen nach (12.25)(i). $\square$

Die Umkehrung in (6) gilt allgemein nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

(7) Beispiel. $\tilde{U}_1(0) \subset B(\mathbb{N},\mathbb{K})$ ist beschränkt und abgeschlossen (klar), aber **nicht kompakt**, da für

$$f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K},\ f_n(m) := \delta_{n,m}$$

gilt: (f_n) in $\tilde{U}_1(0)$ und $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ für $n \neq m \overset{(4)(v)}{\Longrightarrow} (f_n)$ hat keinen Häufungspunkt $\overset{(5)(ii)}{\Longrightarrow}$ $\tilde{U}_1(0)$ ist nicht kompakt.

(8) Korollar. $A \subset \mathbb{K}^m$ *ist genau dann kompakt, wenn* A *beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. O.E. versehen wir $\mathbb{K}^m$ mit der Maximumnorm. Sei A beschränkt und abgeschlossen und (x_k) in A. Dann sind $(x_{ki})_k$ beschränkt in $\mathbb{K}$ für $i = 1, \dots, m$. Nach (5.15) Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_l 1})$ von (x_{k1}). Ebenso existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{l_p} 2})$ von $(x_{k_l 2})$, u.s.w. Auf diese Weise findet man eine Teilfolge (y_n) von (x_k) derart, dass (y_{ni}) für $i = 1, \dots, m$ konvergiert. Nach (12.18) konvergiert (y_n) gegen ein $y \in \mathbb{K}^m$. Da (y_n) in A ist und $A = \overline{A}$, folgt $y \in A$. Damit ist A kompakt nach (5)(ii). — Die Umkehrung gilt nach (6). □

Sei D eine Menge. Es ist $\tilde{U}_1(0) \subset (B(D,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ genau dann kompakt, wenn D endlich ist. Falls nämlich $|D| = m$, dann ist $B(D,\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}^m$ identifizierbar, und die Behauptung folgt aus (8). Falls $|D| = \infty$, gehe wie in Beispiel (7) vor.

(9) Satz. *Seien* X_i *metrische Räume,* $X := \prod_{i=1}^m X_i$ *der Produktraum und* $A_i \subset X_i$ *für* $i = 1, \dots, m$. *Dann gilt:*

$$A := \prod_{i=1}^m A_i \subset X \textit{ kompakt } \iff A_i \textit{ kompakt } \forall i.$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei (x_k) in A. Für jedes i ist dann (x_{ki}) eine Folge in der kompakten Menge A_i. Nach (6) ist A_i abgeschlossen. Wie im Beweis zu (8) folgt die Existenz einer gegen ein $y \in X$ konvergenten Teilfolge (y_n) von (x_k). Da A nach (12.16) abgeschlossen ist, ist $y \in A$. Somit ist A kompakt nach (5)(ii). — "$\Leftarrow$": Folgt sofort aus dem folgenden Satz, weil die Projektionen

$$p_i : X \to X_i,\ (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$$

offensichtlich stetig sind. □

(10) Satz. *Seien* X, Y *metrische Räume,* $A \subset X$ *kompakt und* $f : X \to Y$ *stetig. Dann ist* $f(A)$ *kompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ offen für alle $V \in \mathcal{V}$ und $\mathcal{U} := \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$ eine offene Überdeckung von $A \subset f^{-1}(f(A))$. Damit existiert ein endliches $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, so dass $\mathcal{U}_1 := \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}_1\}$ eine Überdeckung von A ist, d.h. $A \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}_1} f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}_1}\right)$. Hieraus folgt, dass $\mathcal{V}_1$ eine endliche Teilüberdeckung von A ist. Also ist $f(A)$ kompakt. □

(11) Satz. ***Maximum und Minimum***. *Sei* X *ein kompakter metrischer Raum und* $f : X \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann existieren* $a, b \in X$ *mit*

$$f(a) = \inf f(X), \qquad b = \sup f(X).$$

D.h. f *hat ein Minimum und Maximum.*

Beweis. Nach (10) ist $f(X)$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen nach (8). Damit sind $\inf f(X) \in f(X)$ und $\sup f(X) \in f(X)$. □

(12) Lemma. *Seien* X *ein kompakter metrischer Raum und* $A \subset X$. *Dann gilt:* A *kompakt* $\Longleftrightarrow$ A *abgeschlossen.*

Beweis. "$\Rightarrow$" gilt nach (6). Zu "$\Leftarrow$" sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von A. Dann ist $\{X \setminus A\} \cup \mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Also existiert ein endliches $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$, so dass $\{X \setminus A\} \cup \mathcal{U}_1$ eine Überdeckung von X ist. Daher ist $\mathcal{U}_1$ eine endliche Teilüberdeckung von A. □

(13) Satz. ***Stetige Inverse***. *Seien* X, Y *metrische Räume,* X *kompakt,* $f : X \to Y$ *stetig und injektiv und* $g : f(X) \to X$ *die Umkehrabbildung zu* f *(d.h.* $g(f(x)) = x \ \forall x \in X$*). Dann ist* g *stetig.*

Beweis. Sei A abgeschlossen. Nach (12.40)(iii) genügt es zu zeigen, dass $g^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. Nun ist $g^{-1}(A) = f(A)$ kompakt nach (12) und (10) und somit abgeschlossen nach (12). □

(14) Definition. Seien X und Y metrische Räume. $f : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in X \text{ mit } d(x, y) < \delta : \ d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Offenbar gilt: f gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f stetig. Die Umkehrung gilt nicht (siehe (7.19)ff.).

(15) Satz. *Seien* X, Y *metrische Räume,* X *kompakt und* $f : X \to Y$ *stetig. Dann ist* f *gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert $\epsilon_0 > 0$ derart, dass es zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ ein Paar $(x_n, y_n) \in X \times X$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ gibt, wofür $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0$. Weil X kompakt ist, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $a \in X$ mit $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. Es folgt

$$d(a, y_{n_k}) \leq \underbrace{d(a, x_{n_k})}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{d(x_{n_k}, y_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also gilt auch $y_{n_k} \to a$. Weil f stetig ist, folgt $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), f(a)) + d(f(a), f(y_{n_k})) \to 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0 \ \forall n$. □

(16) Definition. Seien V ein Vektorraum und $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ zwei Normen auf V. Dann heißen diese Normen **äquivalent**, wenn Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \quad \forall\, x \in V$$

Man überlegt sich leicht:

- Äquivalente Normen definieren die gleiche Topologie, d.h. die gleichen offenen Mengen, da $\forall\, x \in X,\ r > 0$
$$U^{(1)}_{\frac{r}{\beta}}(a) \subset U^{(2)}_r(a) \subset U^{(1)}_{\frac{r}{\alpha}}(a).$$
- Äquivalente Normen definieren die gleichen abgeschlossenen, beschränkten und kompakten Mengen.
- Äquivalente Normen definieren die gleichen CF, weshalb $(V, \|.\|_1)$ genau dann ein BR ist, wenn $(V, \|.\|_2)$ ein BR ist.
- Die Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Zur Symmetrie beachte, dass $\frac{1}{\beta}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|_2$ gilt.

(17) Satz. *Alle Normen auf $\mathbb{K}^m$ sind äquivalent. Damit sind alle Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum äquivalent.*

Beweis. Sei $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^m$. Es genügt zu zeigen, dass Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_\infty \ \forall x \in \mathbb{K}^m.$$

Alle $x \in \mathbb{K}^m$ lassen sich als $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j$ bez. der Standardbasis $\{e_j\}$ des $\mathbb{K}^m$ darstellen. Mit $\beta' := \max\{\|e_j\| : j = 1, \ldots, m\}$ und $\beta := m\beta'$ folgt

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^m \lambda_j e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^m |\lambda_j|\|e_j\| \leq \beta' \sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leq \beta' m \max\{|\lambda_j| : j = 1, \ldots, m\} = \beta\|x\|_\infty.$$

Betrachte nun $f : (\mathbb{K}^m, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \|x\|$. Nach (12.37) ist f ist stetig, denn $|f(x) - f(a)| = |\|x\| - \|a\|| \leq \|x - a\| \leq \beta\|x - a\|_\infty$. Weiter ist $S := \{x \in \mathbb{K}^m : \|x\|_\infty = 1\}$ beschränkt und abgeschlossen (klar), weshalb S nach (8) kompakt ist. Weil f positiv ist, folgt aus (11), dass $\alpha := \min f(S) > 0$. Damit gilt für alle $x \in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}$: $\alpha \leq f\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} x\right) = \frac{1}{\|x\|_\infty}\|x\|$, weshalb $\|x\| \geq \alpha\|x\|_\infty$. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Seien (X, d) ein metrischer Raum, $A,B \subset X$ und $c \in X$. Dann definiert

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

den **Abstand** der Menge A von der Menge B. Weiter ist $d(c, A) := d(\{c\}, A)$ der Abstand des Punktes c von der Menge A. Zeigen Sie:

- $d(A, B) = 0$ falls $A \cap B \neq \emptyset$. Man gebe ein Beispiel für $d(A, B) = 0$ mit zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B.
- $|d(x, A) - d(y, B)| \leq d(x, y)\ \forall x, y \in X$.
- $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ ist stetig.
- Ist A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$, dann ist $d(A, B) > 0$.

15 Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wie bisher sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Weiter bezeichnet I ein allgemeines Intervall, d.h. I braucht weder beschränkt noch offen oder abgeschlossen zu sein.

(1) Definition. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\alpha_n \neq 0$. Dann nennt man

$$\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \qquad (*)$$

eine **homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$. Dabei bezeichnet $y^{(i)}$ die i−te Ableitung der Funktion y. Die Differentialgleichung heißt

- homogen, weil die rechte Seite gleich 0 ist.
- n-ter Ordnung, weil $y^{(n)}$ die höchste vorkommende Ableitung ist.
- linear, weil $\alpha_n \eta_n + \alpha_{n-1}\eta_{n-1} + \ldots + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_0 \eta_0 = 0$ eine lineare Gleichung für die Unbekannten $\eta_n, \ldots, \eta_0 \in \mathbb{K}$ ist.

Eine **Lösung** von $(*)$ ist jede auf einem Intervall I definierte n-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{K}$, für die gilt:

$$\alpha_n y^{(n)}(t) + \ldots + \alpha_0 y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige: Jede Lösung von $(*)$ ist beliebig oft differenzierbar. (Außerdem wird sich herausstellen, dass jede Lösung eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar ist.)

(2) Beispiel. Die Auslenkung y eines gedämpften linearen Oszillators genügt der Differentialgleichung (DG)

$$my'' + d\,y' + k\,y = 0.$$

Dabei ist

- m die Masse
- y'' die Beschleunigung
- $d\,y'$ die Reibungskraft, proportional zur Geschwindigkeit
- $k\,y$ die rücktreibende Kraft, proportional zur Auslenkung.

Setze $\frac{d}{m} := 2b$ und $\frac{k}{m} := c$. Dann lautet die DG

$$y'' + 2by' + cy = 0.$$

Mit dem Lösungsansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ folgt durch Einsetzen $(\lambda^2 + 2b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0$. Damit ist $e^{\lambda t}$ genau dann Lösung, wenn

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0,$$

d.h.

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.$$

Fall 1. $b^2 > c \Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Die Lösungen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ können wegen der Linearität der DG linear zu weiteren Lösungen kombiniert werden. Man verifiziert, dass

$$y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

für jedes $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung ist.

Fall 2. $b^2 < c \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -b \pm i\omega$, $\omega := \sqrt{c - b^2}$, d.h. λ_1, λ_2 sind nicht reell und konjugiert komplex. Entsprechend ist $e^{\lambda_{1,2} t} = e^{-bt \pm i\omega t} = e^{-bt}(\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$. Wie man sich überzeugt, ist die Linearkombination

$$y(t) = e^{-bt}(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \ \forall t \in \mathbb{R}$$

für jedes $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Lösung.

Fall 3. $b^2 = c \Longrightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -b$. Der Ansatz liefert hier nur die Lösung e^{-bt}. Man bemerkt, dass in diesem Fall te^{-bt} eine weitere Lösung ist. Also ist die Linearkombination

$$y(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-bt} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

für jedes $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Lösung.

Es wird sich herausstellen, dass es in jedem der drei Fälle keine weiteren reellen Lösungen gibt.

(3) Äquivalentes System 1. Ordnung. Wir führen zu (1)(∗) künstlich folgende neue Funktionen ein:

$$\begin{aligned} y_1 &:= y \\ y_2 &:= y' \\ y_3 &:= y^{(2)} \\ &\ \vdots \\ y_n &:= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Dann gelten offenbar die gekoppelten DG

$$\begin{aligned} y_1' &:= y_2, \\ y_2' &:= y_3, \\ &\ \vdots \\ y_{n-1}' &:= y_n, \\ y_n' &:= -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_n - \ldots - \frac{\alpha_0}{\alpha_n} y_1. \end{aligned}$$

Faßt man $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ zu einem Vektor y zusammen, dann gilt

$$y' := \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_n - \ldots - \frac{\alpha_0}{\alpha_n} y_1 \end{pmatrix}.$$ Das bedeutet

$$y' = Ay,$$

wobei

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares System 1. Ordnung, was offenbar äquivalent zu (1)($*$) ist.

(4) Beispiel. Der gedämpfte Oszillator (2) ist äquivalent zu

$$y' = Ay, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix}.$$

(5) Definition. Seien $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ und

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dann heißt

$$y' = Ay \tag{$**$}$$

ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. A ist die **Koeffizientenmatrix**. Lösung ist jede auf einem Intervall I definierte differenzierbare Abbildung $y : I \to \mathbb{K}^n$ mit

$$y'(t) = A\,y(t) \quad \forall t \in I.$$

Differenziert wird komponentenweise.

Wie das Beispiel des gedämpften Oszillators zeigt, ist es sinnvoll, komplexwertige Lösungen zu betrachten, auch wenn man letzlich nur an reellen Lösungen interessiert ist. Zur Lösung von $(**)$ wird die Matrixexponentialfunktion eingeführt.

(6) Definition und Satz. *Bezeichne* $\|.\|$ *eine Norm auf* $\mathbb{K}^n$ *bzw.* $\mathbb{K}^m$. *Dann definiert*

$$\|B\| := \sup_{x\in\mathbb{K}^n,\, \|x\|\le 1} \|Bx\|$$

für $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ *eine Norm, die sogenannte* ***Operatornorm*** *auf* $\mathbb{K}^{m,n}$.

Beweis.

- $\|B\| \geq 0$ ist klar; $\|B\| = 0 \Longrightarrow Bx = 0\ \forall \|x\| \leq 1 \Longrightarrow Bx = \|x\| B\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) = 0\ \forall x \neq 0$ $\Longrightarrow B = 0$. Also ist $\|.\|$ positiv definit.
- $\|\lambda Bx\| = |\lambda|\|Bx\| \Longrightarrow \|\lambda B\| = |\lambda|\|B\|$. Also ist $\|\cdot\|$ positiv homogen.
- $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \Longrightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Also erfüllt $\|.\|$ die Dreiecksungleichung.

$\square$

Die Operatornorm hat wichtige Eigenschaften.

(7) Satz. $\forall C \in \mathbb{K}^{l,m}$, $B \in \mathbb{K}^{m,n}$, $x \in \mathbb{K}^n$ *gilt:*

(α) $\|Bx\| \leq \|B\|\|x\|$

(β) $\|CB\| \leq \|C\|\|B\|$

(γ) $\mathbb{K}^{l,m} \times \mathbb{K}^{m,n} \to \mathbb{K}^{l,n}$, $(C, B) \mapsto CB$ *ist stetig.*

Beweis. (α) Für $x \neq 0$ gilt: $\|B\| \geq \left\|B\frac{1}{\|x\|}x\right\| = \left\|\frac{1}{\|x\|}Bx\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|Bx\| \Longrightarrow (\alpha)$.

(β) $\|CBx\| = \|C(Bx)\| \overset{(\alpha)}{\leq} \|C\|\|Bx\| \overset{(\alpha)}{\leq} \|C\|\|B\|\|x\| \leq \|C\|\|B\|\ \forall \|x\| \leq 1 \Longrightarrow (\beta)$.

(γ) $\|CB - C_0B_0\| = \|CB - CB_0 + CB_0 - C_0B_0\| \leq \|C(B - B_0)\| + \|(C - C_0)B_0\| \leq \|C\|\|B - B_0\| + \|C - C_0\|\|B_0\| \leq (\|C - C_0\| + \|C_0\|)\|B - B_0\| + \|C - C_0\|\|B_0\| \to 0$ für $B \to B_0,\ C \to C_0 \Longrightarrow (\gamma)$.

$\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige: Seien $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $\beta \geq 0$ mit $\|Bx\| \leq \beta\|x\|$ für alle $\|x\| \leq 1$. Dann ist $\|B\| \leq \beta$.

(8) Bemerkung. Sei $\|B\|_\infty = \max_{i,j} |B_{ij}|$ die Maximumnorm auf $\mathbb{K}^{m,n}$. Da $\mathbb{K}^{m,n}$ endlich dimensional ist, sind alle Normen darauf äquivalent. Also existieren α, $\beta > 0$ mit

$$\alpha\|B\|_\infty \leq \|B\| \leq \beta\|B\|_\infty \quad \forall\, B \in \mathbb{K}^{m,n}.$$

Sind (B_k) in $\mathbb{K}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m,n}$, dann gilt daher: $B_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} B$ (bez. irgendeiner Norm auf $K^{m,n}$) $\iff B_{k,ij} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} B_{ij}\ \forall i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n$, d.i. die komponentenweise Konvergenz.

(9) Satz. ***Matrixexponentialfunktion.*** *Für* $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ *konvergiert die Reihe*

$$\exp(B) := e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = E_n + B + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \dots$$

absolut in $(\mathbb{K}^{m,n}, \|.\|)$ *(siehe* (10.6)*) mit*

$$\|e^B\| \le e^{\|B\|}.$$

Beweis. $\forall\, j \in \mathbb{N}: \ \left\|\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} B^k\right\| \le \sum_{k=0}^{j} \left\|\frac{1}{k!} B^k\right\| \overset{(7)(\beta)}{\le} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} \|B\|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B\|^k = e^{\|B\|}$. □

(10) Beispiele.

(a) $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n} \Longrightarrow e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

(b) $N \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt **nilpotent**, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $N^l = 0$. Dann ist

$$e^N = E + N + \frac{1}{2} N^2 + \dots + \frac{1}{(l-1)!} N^{l-1} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} N^k.$$

Beweis. (a) $D^k = \mathrm{diag}(\dots, \lambda_j^k, \dots) \Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k = \mathrm{diag}(\dots, \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \lambda_j^k, \dots) \overset{(8)}{\Rightarrow}$ Behauptung.
(b) ist klar. □

Vorsicht: Im Allgemeinen ist $(B^k)_{ij} \neq (B_{ij})^k$!

(11) Beispiele.

(a) $\exp\begin{pmatrix} 2\pi i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0 \Longrightarrow e^{tA} = E + t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$
$\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 5t + 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Im Fall, dass A nilpotent ist, sind die Koeffizienten von e^{tA} Polynome in t.

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = -E \Longrightarrow A^3 = -A,\ A^4 = E,\ A^5 = A$ u.s.w. Daher ist

$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} +$
$\ldots = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \ldots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$

Etwas eleganter erhält man

$e^{tA} = E + tA - \frac{t^2}{2!}E - \frac{t^3}{3!}A + \frac{t^4}{4!}E + \frac{t^5}{5!}A - \ldots = (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots)E + (t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots)A =$
$(\cos t)E + (\sin t)A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$

(d) $N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist nilpotent mit $N^n = 0$, denn allgemein gilt: Seien $r, s \geq 0$ und $A = (A_{ij})$ mit $A_{ij} = 0$ für $i \geq j - r$ sowie $B = (B_{kl})$ mit $B_{kl} = 0$ für $k \geq l - s$, d.h. die Diagonale sowie die anschließenden r bzw. s oberen Nebendiagonalen von A bzw. B sind null. Dann verschwinden die Diagonale und die anschließenden $r + s + 1$ oberen Nebendiagonalen von $C := BA$, denn $C_{kj} = \sum_{l=1}^{n} B_{kl}A_{lj} \neq 0$ höchstens für $l < j - r$ und $k < l - s$, d.h. $C_{kj} = 0$ für $k \geq j - r - s - 1$.

(e) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ ist $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ **unipotent**, wobei in der r-ten Nebendiagonalen Polynome in t vom Grad $\leq r$ stehen: $e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}$ mit

$$A^r = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & * \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(12) Umordnungssatz. Seien $(V, \|.\|)$ ein Banachraum, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in V absolut konvergent und $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\pi(j)}$ absolut konvergent und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\pi(j)}.$$

Beweis. Man lese im Beweis von (6.13) den Betrag $|.|$ als Norm $\|.\|$. $\square$

(13) Cauchyprodukt. Seien $(V, \|.\|) = (\mathbb{K}^{n,n}, \|.\|)$ und die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$ absolut konvergent. Dann ist die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j \text{ mit } C_j := \sum_{k+l=j} A_k B_l, \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

absolut konvergent mit $\sum_{j=0}^{\infty} C_j = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right)$.

Beweis. Siehe (6.14). □

(14) Rechenregeln zur Matrixexponentialfunktion. *Für alle* $A, B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$ *gilt:*

(a) $e^0 = E_n$ *und* $\exp(\mathbb{R}^{n,n}) \subset \mathbb{R}^{n,n}$.

(b) ***Funktionalgleichung:*** $AB = BA$ *(d.h.* A *und* B *sind vertauschbar)* $\Longrightarrow$

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

(c) e^B *ist invertierbar mit der Inversen* $(e^B)^{-1} = e^{-B}$.

(d) $\mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n,n}$, $t \mapsto e^{tA}$ *ist beliebig oft differenzierbar mit*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j e^{tA} = e^{tA} A^j = A^j e^{tA}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

(e) C *invertierbar* $\Longrightarrow C^{-1} e^B C = e^{C^{-1} B C}$.

(f) $\det e^B = e^{\textbf{Spur } B}$.

(g) $\overline{\exp(B)} = \exp(\overline{B})$.

Beweis. (a) ist klar nach Definition.

(b) Es ist $e^{A+B} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A+B)^j$ und wegen $AB = BA$ gilt die binomische Formel

$$(A+B)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^k B^{j-k}.$$

Hiermit folgt wie in (6.16) wegen (12), (13) die Funktionalgleichung.

(c) $E_n = e^0 = e^{B-B} \overset{(b)}{=} e^B e^{-B} \Longrightarrow$ Behauptung.

(d) $\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA} - he^{tA}A) \overset{(b)}{=} e^{tA}\frac{1}{h}(e^{hA} - E - hA)$; $\frac{1}{h}(e^{hA} - E - hA) = \frac{1}{h}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} A^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} A^k$. $\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} A^k \right\| \le |h| \|A\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} |h|^k \|A\|^k < |h| \|A\|^2 e^{|h|\|A\|} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Mit der Stetigkeit (7)(γ) folgt daraus $\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA} - he^{tA}A) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA}) = e^{tA}A$. Den Rest der Behauptung beweist man ganz ähnlich.

(e) $\exp(C^{-1}BC) \overset{N\to\infty}{\longleftarrow} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(C^{-1}BC)^k \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}C^{-1}B^kC = C^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}B^k\right)C \overset{N\to\infty}{\longrightarrow}$ $C^{-1}BC$ wegen der Stetigkeit (7)(γ). Dazu wurde benutzt

$$(C^{-1}BC)^k = \underbrace{C^{-1}BC}\,\underbrace{C^{-1}BC}\dots\underbrace{C^{-1}BC} = C^{-1}B^kC \tag{$*$}$$

(f) folgt mit der Jordan Normalform, siehe (17).

(g) gilt, weil generell $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$ und weil $A \mapsto \overline{A}$ stetig ist.

$\square$

Wir wenden uns nun wieder dem Differentialgleichungssystem (5)($**$) zu.

(15) Definition und Satz. *Seien* $t_0 \in \mathbb{R}$ *und* $y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *vorgegeben. Gesucht ist eine Lösung von*

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Dies nennt man eine **Anfangswertaufgabe** (AWA). *Sie hat die eindeutige auf ganz* $\mathbb{R}$ *fortgesetzte Lösung*

$$y(t) := e^{(t-t_0)A}y_0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Mit (14)(d) folgt $y'(t) = Ae^{(t-t_0)A}y_0 = Ay(t)$. Außerdem ist $y(t_0) = e^{0A}y_0 = E_ny_0 = y_0$. — Zur Eindeutigkeit sei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung der AWA auf $\tilde{I}$ mit $t_0 \in \tilde{I}$. Für $z := y - \tilde{y}$ auf $\tilde{I}$ gilt $z'(t) = y'(t) - \tilde{y}'(t) = A(y(t) - A(\tilde{y}(t)) = Az(t)$ $\forall t \in \tilde{I}$ und $z(t_0) = 0$. Setze weiter $x(t) := e^{-(t-t_0)A}z(t)$. Dann ist $x'(t) = e^{-(t-t_0)A}(-A)z(t) + e^{-(t-t_0)A}z'(t) = e^{-(t-t_0)A}(-Az(t) + z'(t)) = 0$ und $x(t_0) = 0$. Der HDI komponentenweise auf x angewendet liefert $x(t) = 0$ und somit $z(t) = e^{(t-t_0)A}x(t) = 0$, d.h. $y(t) = \tilde{y}(t)$ $\forall t \in \tilde{I}$. $\square$

Aufgrund von (15) betrachten wir die Lösungen von

$$y' = Ay \tag{$**$}$$

stets auf ganz $\mathbb{R}$.

(16) Definition und Satz. Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sei

$$\mathcal{L} := \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n : y \text{ differenzierbar und Lösung von } y' = Ay\}$$

der **Lösungsraum**. *Dann ist* $\mathcal{L}$ *ein Unterevektorraum von* $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ *der Dimension* n. *Die Spalten von* $t \mapsto \exp(tA)$ *bilden eine Basis von* $\mathcal{L}$.

Eine Basis $y_1, \dots, y_n$ von $\mathcal{L}$ heißt auch **Fundamentalsystem** von ($*$) und $Y = (y_1 \dots y_n)$ heißt eine **Fundamentalmatrix**.

Die Abbildung $C \mapsto Y$, $Y(t) := e^{tA}C$ *ist eine Bijektion von der Menge der invertierbaren Matrizen* $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ *auf die der Fundamentalmatrizen* Y *von ($*$). Die Umkehrabbildung lautet* $Y \mapsto Y(0)$.

Beweis.

- Nach (14)(d) und (15) sind die Lösungen von ($**$) beliebig oft differenzierbar.

- Die Nullfunktion 0, die sogenannte triviale Lösung, liegt in $\mathcal{L}$. Seien $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ und $y := y_1 + \alpha y_2$. Dann ist $y' = y_1' + \alpha y_2' = Ay_1 + \alpha A y_2 = A(y_1 + \alpha y_2) = Ay$, weshalb $y \in \mathcal{L}$. Somit ist $\mathcal{L}$ ein Vektorraum.

- Sei $\eta_i : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, $\eta_i(t) := e^{tA} e_i$, die i-te Spalte von e^{tA}. Nach (15) ist $\eta_i \in \mathcal{L}$. Es ist die Lösung zur AWA $\eta_i(0) = e_i$.

- Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit der η_i sei $\alpha_1 \eta_1 + \ldots + \alpha_n \eta_n = 0$. Daraus folgt insbesondere $\alpha_1 \eta_1(0) + \ldots + \alpha_n \eta_n(0) = 0$, d.h. $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$, weshalb $\alpha_i = 0\ \forall i$.

- Die η_i bilden eine Erzeugendenmenge. Zum Nachweis sei $y \in \mathcal{L}$ vorgegeben. Dann setze $\alpha_i := y_i(0)$ und $\eta := \sum_i \alpha_i \eta_i \in \mathcal{L}$. Dafür ist $\eta(0) = \sum_i \alpha_i \eta_i(0) = \sum_i y_i(0) e_i = y(0)$. Damit lösen y und η die gleiche AWA, weshalb $y = \eta$ nach (15).

- Sei C invertierbar und $y(t) = e^{tA} C\ \forall t$. Dann ist $(y_1, \ldots, y_n)$ das Bild der Basis $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ unter C. Damit ist $(y_1, \ldots, y_n)$ selbst eine Basis. Also ist Y eine Fundamentalmatrix.

- Sei nun umgekehrt Y eine Fundamentalmatrix. Setze $\tilde{Y}(t) := e^{tA} Y(0)$. Nach (15) löst $\tilde{y}_i$ die AWA zu $\tilde{y}_i(0) = y_i(0)$, weshalb $\tilde{y}_i = y_i\ \forall i$. Damit ist $\tilde{Y} = Y$, d.h. $Y(t) = e^{tA} Y(0)$. $Y(0)$ ist invertierbar, weil es die Basis $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ auf die Basis $(y_1, \ldots, y_n)$ abbildet.

□

Damit ist die Lösung von

$$y' = Ay$$

auf das Problem der Berechnung von e^{tA} zurückgeführt. Die direkte Berechnung über die Reihe ist oft unmöglich.

(17) Jordan Normalform. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ (!). Dann existiert eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{C}^{n,n}$ derart, dass*

$$A = C\,K\,C^{-1},$$

wobei K die Blockdiagonalform

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_s \end{pmatrix}$$

besitzt mit

$$K_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_\sigma & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_\sigma \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ die Menge der Eigenwerte von A ist. Die λ_σ sind dabei im allgemeinen nicht paarweise verschieden. Die Spalten von C bilden eine Basis aus Hauptvektoren von A.

Beweis. Siehe Lineare Algebra. □

(18) Berechnung von e^{tA}. Mit (17) folgt zunächst

$$e^{tA} = e^{CtKC^{-1}} \overset{(14)(e)}{=} Ce^{tK}C^{-1} = C\mathrm{diag}(e^{tK_1}, \dots, e^{tK_s})C^{-1},$$

weil sich die Blöcke unabhängig addieren und multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & 0 \\ 0 & BB' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+A' & 0 \\ 0 & B+B' \end{pmatrix}.$$

Für die Jordankästchen gilt $K_\sigma = \lambda_\sigma E_{k_\sigma} + N_\sigma$, wobei $N_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ nilpotent ist und $t\lambda_\sigma E_{k_\sigma}$ und tN_σ vertauschen. Nach (14)(b) ist daher

$$e^{tK_\sigma} = e^{t\lambda_\sigma E_{k_\sigma}} e^{tN_\sigma} = e^{t\lambda_\sigma}(E_{k_\sigma} + tN_\sigma + \dots + \frac{t^{k_\sigma - 1}}{(k_\sigma - 1)!} N_\sigma^{k_\sigma - 1}) = e^{t\lambda_\sigma} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{k_\sigma-1}}{(k_\sigma-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Berechnung von e^{tA} auf die Berechnung der Jordan Normalform von A zurückgeführt.

(19) Algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte. Bekanntlich ist μ ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - \mu E) = 0$. Für das charakteristische Polynom gilt einerseits

$$\det(A - \zeta E) = \prod_{\mu \text{ EW von } A} (\mu - \zeta)^{\alpha_\mu},$$

wobei α_μ die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts μ ist. Andererseits folgt aus der Jordan Normalform

$$\det(A - \zeta E) = \det(C(K - \zeta E)C^{-1}) = \det(K - \zeta E) = (\lambda_1 - \zeta)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_s - \zeta)^{k_s}.$$

Daher ist $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ die Menge der Eigenwerte von A und die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts μ ist die Summe der Dimensionen der Jordankästchen zu μ, d.h.

$$\alpha_\mu = \sum_{\sigma\colon \lambda_\sigma = \mu} k_\sigma.$$

Die **geometrische Vielfachheit** von μ ist $\gamma_\mu = \dim\ker(A - \mu E) = \dim\{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \mu x\}$. Sie ist die Summe der Jordankästchen zum Eigenwert μ, denn $K_\sigma - \lambda_\sigma E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ hat den eindimensionalen Kern $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Faktorisierung des charakteristischen Polynoms $\det(A - \zeta E)$ und die Berechnung der Eigenräume legen also für jeden Eigenwert die Anzahl der Jordankästchen und ihre Gesamtdimension fest.

(20) Folgerung. Für $y' = Ay$ ist nach (16) und (17)

$$Y(t) := e^{tA}C = Ce^{tK} = C\mathrm{diag}(e^{tK_1}, \dots, e^{tK_s}),\ t \in \mathbb{R}$$

eine Fundamentalmatrix. Ihre Matrixelemente sind Linearkombinationen der Funktionen

$$t^l e^{t\mu}$$

wobei μ eine Eigenwert von A ist und $0 \le l \le \max\{k_\sigma - 1 : \lambda_\sigma = \mu\} \le \alpha_\mu - \gamma_\mu$.

Extremfälle:

(α) $\alpha_\mu = \gamma_\mu\ \forall \mu$. Dann ist A diagonalisierbar mit $K = \begin{pmatrix} \kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_n \end{pmatrix}$, die Spalten von C ergeben eine Basis von Eigenvektoren $Ac_i = \kappa_i c_i$ und

$$Y(t) = (e^{t\kappa_1}c_1, \dots, e^{t\kappa_n}c_n)$$

ist eine Fundamentalmatrix. Es "genügt" also die Eigenwerte und eine Basis $c_1, \dots, c_n$ von Eigenvektoren zu berechnen.

(β) $\gamma_\mu = 1\ \forall \mu$, d.h. zu jedem Eigenwert gibt es nur ein Jordankästchen. Dann sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ paarweise verschieden und

$$C = (c_{11}, \dots, c_{1k_1}, c_{21}, \dots, c_{2k_2}, \dots, c_{s1}, \dots, c_{sk_s}),$$

wobei $c_{\sigma 1}, \dots, c_{\sigma k_\sigma}$ jeweils eine Kette von Hauptvektoren ist. ($v \neq 0$ heißt Hauptvektor zum Eigenwert μ, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $(A - \mu E)^k v = 0$.) Diese Kette kann rekursiv aufgebaut werden, wie folgt. Sei $\mu = \lambda_\sigma$, $k = k_\sigma$ und $v_i = c_{\sigma i}$.

Bestimme $v_1 \neq 0$ als Lösung von $(A - \mu E)x = 0$. Dann bestimme v_2 als Lösung von $(A - \mu E)x = v_1$, u.s.w. Schließlich bestimme v_k als Lösung von $(A - \mu E)x = v_{k-1}$. Es gilt also $(A - \mu E)v_i = v_{i-1}$ für $i = 1, \dots, k$ und $v_0 = 0$. Dann ist $(v_1, \dots, v_k)$ die gesuchte Kette.

Weil $(A - \mu E)^i v_i = 0$, ist $y_i(t) := e^{tA}v_i = e^{t(\mu E + (A - \mu E))}v_i = e^{t\mu}e^{t(A-\mu E)}v_i = e^{t\mu}(E + t(A - \mu E) + \frac{t^2}{2!}(A - \mu E)^2 + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}(A - \mu E)^{i-1})v_i = e^{t\mu}(v_i + tv_{i-1} + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}v_1)$, $i = 1, \dots, k$.

Damit lautet die Fundamentalmatrix:

$$Y = (y_{11}, \dots, y_{1k_1}, \dots, y_{s1}, \dots y_{sk_s})$$

mit $y_{\sigma i}(t) = e^{t\lambda_\sigma}(c_{\sigma i} + tc_{\sigma, i-1}) + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}c_{\sigma 1}$ für $i = 1, \dots, k_\sigma$ und $\sigma = 1, \dots, s$.

(γ) Der gemischte Fall $\alpha_\mu = \gamma_\mu$ oder $\gamma_\mu = 1$ (für jedes μ) ist mit (α) und (β) lösbar durch die Berechnung der Eigenwerte und Hauptvektorenketten.

(δ) $\alpha_\mu = n$, d.h. A hat nur einen Eigenwert μ. Dann ist $A - \mu E$ nilpotent, wie man an der Jordan Normalform erkennt. Damit ist $e^{tA} = e^{t\mu}(E + t(A - \mu E) + \frac{t^2}{2!}(A - \mu E)^2 + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A - \mu E)^{n-1})$.

(ϵ) Aufwendigster Fall: $n > \alpha_\mu > \gamma_\mu > 1$ für mindestens einen Eigenwert μ. Der niedrigstdimensionale Fall dazu ist $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(21) Reelle Lösungen. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dann ist $\det(A - \zeta E)$ ein Polynom in ζ mit reellen Koeffizienten. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen, daher sind sie entweder reell oder treten in konjugiert komplexen Paaren auf (vgl. vor (4.23)). In (20) ergeben sich daher reelle Lösungen als reelle Linearkombinationen von

$$t^l e^{t\mathrm{Re}\mu} \cos(\mathrm{Im}\mu)t \;\text{ und }\; t^l e^{t\mathrm{Re}\mu} \sin(\mathrm{Im}\mu)t.$$

Sei y eine Lösung von $y' = Ay$. Dann ist $\overline{y}$, $(\overline{y})_i(t) := \overline{y_i(t)}$ auch Lösung, denn $\overline{y'} = (\overline{y})'$ und $\overline{\exp(tA)y} = \exp(t\overline{A})\overline{y} = \exp(tA)\overline{y}$ nach (14)(g). Damit sind $\frac{1}{2}(y + \overline{y})$ und $\frac{1}{2i}(y - \overline{y})$ reelle Lösungen. Mit ihnen bildet man ein **reelles** Fundamentalsystem.

(22) Beispiel. Homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 x' + \alpha_0 x = 0.$$

Dann ist

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

die Matrix des zugehörigen Systems (vgl. (3)). Es gilt

$$Av = \zeta v \iff \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ -\alpha_0 v_1 - \ldots - \alpha_{n-1}v_n \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \iff$$

$v_2 = \zeta v_1,\ v_3 = \zeta v_2,\ \ldots,\ v_n = \zeta v_{n-1},\ -\alpha_0 v_1 - \ldots - \alpha_{n-1} v_n = \zeta v_n \Longleftrightarrow$

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix},\ v_1(\zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + \alpha_1\zeta + \alpha_0) = 0.$$

Damit ist gezeigt:

- μ ist Eigenwert genau dann, wenn μ Nullstelle des **charakteristischen Polynoms**

  $$\chi(\zeta) := \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + \alpha_1\zeta + \alpha_0$$

  der Differentialgleichung ist.

- $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \vdots \\ \mu^{n-1} \end{pmatrix}$ ist der zum Eigenwert μ gehörige eindimensionale Eigenraum.

Also ist $\gamma_\mu = 1\ \forall \mu$, d.i. der Extremfall ($\beta$) in (20). Daher ist jede Lösung $x(t) (= x_1(t))$ der Differentialgleichung eine Linearkombination der n Funktionen

$$t^l e^{t\mu} \text{ mit } \mu \text{ Eigenwert und } 0 \le l \le \alpha_\mu - 1.$$

Schließlich ist nach (3) $x_{i+1} = x^{(i)}$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Damit gilt der folgende

Satz. *Seien* $t_0 \in \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in \mathbb{K}^n$ *vorgegeben. Die AWA*

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 x' + \alpha_0 x = 0, \quad x^{(i)}(t_0) = x_{0,1},\ i = 1, \ldots, n$$

hat eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}$. *Die Funktionen* $t^l e^{t\mu}$ *(s.o.) bilden eine Basis des Lösungsraumes über* $\mathbb{C}$. *Die Koeffizienten* $\alpha_{\mu,l}$ *der Lösung*

$$x(t) = \sum_{\mu,l} \alpha_{\mu,l} t^l e^{t\mu},\ t \in \mathbb{R}.$$

der obigen AWA lösen eindeutig das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\mu,l} \alpha_{\mu,l} \left(\frac{d}{dt}\right)^i [t^l e^{t\mu}]_{t=t_0} = x_{0,i},\ i = 0, \ldots, n-1.$$

Sind $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ *reell, dann treten die nicht reellen Eigenwerte* μ *in konjugiert komplexen Paaren auf. Eine reelle Basis des Lösungsraumes erhält man, indem man*

$$\{t^l e^{t\mu},\ t^l e^{t\overline{\mu}}\}$$

jeweils durch

$$\{t^l e^{t\mathrm{Re}\mu} \cos(\mathrm{Im}\mu)t,\ t^l e^{t\mathrm{Re}\mu} \sin(\mathrm{Im}\mu)t\}$$

ersetzt.

(23) Definition und Satz. Seien $b : I_b \to \mathbb{K}^n$ stetig auf dem Intervall I_b und $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann heißt

$$y' = Ay + b(t) \qquad (*)$$

inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

Seien $t_0 \in I_b$ *und* $y_0 \in \mathbb{K}^n$ *vorgegeben. Dann löst*

$$y(t) := e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s) ds + e^{(t-t_0)A} y_0 \qquad (**)$$

die AWA zu $y(t_0) = y_0$ *für alle* $t \in I_b$. *(Die Integration erfolgt komponentenweise.) Jede Lösung ist die Einschränkung von* y *auf ein* t_0 *enthaltende Teilintervall von* I_b.

Beweis. In der Tat ist $y'(t) = ae^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} b(s) ds + e^{tA} e^{-tA} b(t) + Ae^{(t-t_0)A} y_0 = Ay(t) + b(t)$ und $y(t_0) = e^{t_0 A} \cdot 0 + e^0 y_0 = y_0$. — Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei $\tilde{y}$ eine weitere Lösung der AWA auf einem Intervall $\tilde{I} \subset I_b$ mit $t_0 \in \tilde{I}$. Dann ist $z := y - \tilde{y}$ auf $\tilde{I}$ definiert mit $z'(t) = y'(t) - \tilde{y}'(t) = Ay(t) + b(t) - (A\tilde{y}(t) + b(t)) = A(y(t) - \tilde{y}(t)) = Az(t)\ \forall t \in \tilde{I}$. Also löst z die AWA des homogenen Problems mit $z(t_0) = y(t_0) - \tilde{y}(t_0) = 0$. Nach (15) ist z die triviale Lösung 0. Daraus folgt $y(t) = \tilde{y}(t)\ \forall t \in \tilde{I}$. □

Wegen (23) betrachten wir Lösungen von $(*)$ stets auf ganz I_b. Die Lösungsformel $(**)$ ist in der Praxis oft nicht auswertbar. Aber eine einzelne Lösung, genannt **partikuläre Lösung** ist oftmals bekannt oder wird durch einen Ansatz gefunden.

(24) Lemma. *Es gilt*

$$\mathcal{L}_b = y_p + \mathcal{L}.$$

Dabei ist $\mathcal{L}$ *der Lösungsraum des homogenen Systems* $y' = Ay$, $\mathcal{L}_b$ *der des inhomogenen Systems* $y' = ay + b(t)$ *und* y_p *eine partikuläre Lösung.*

Beweis. Sei $y \in \mathcal{L}_b$. Dann gilt für $z := y - y_p$: $z'(t) = y'(t) - y_p'(t) = Ay(t) + b(t) - (Ay_p(t) + b(t)) = Ay(t) - Ay_p(t) = Az(t) \Longrightarrow z \in \mathcal{L}$. U.s.w. □

Ist also eine partikuläre Lösung gegeben, so löst man die AWA durch Addition einer geeigneten Lösung des homogenen Systems. Das gleiche gilt für eine einzelne inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 x' + \alpha_0 x = \beta(t).$$

Für das zugehörige System (23) ist A wie in (22) und

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

16 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Wie bisher bezeichne $I \subset \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall und (X, d) einen metrischen Raum.

(1) Definition. Eine stetige Abbildung $f : I \to X$ heißt **Kurve** in X. Das Bild $f(I) \subset X$ nennt man die **Spur der Kurve** und $f(t)$ den Kurvenpunkt zum Parameterwert $t \in I$.

(2) Definition. Eine Kurve $f = (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **(stetig) differenzierbar**, wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ (stetig) differenzierbar sind. Ihre Ableitung

$$f'(t) := (f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_m'(t)) \in \mathbb{R}^n$$

in t heißt der **Tangentialvektor an die Kurve f in t**. Falls $f'(t) \neq 0$ heißt der bez. der euklidschen Norm normierte Vektor

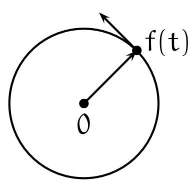
$$\frac{1}{\|f'(t)\|_2} f'(t)$$

der **Tangenteneinheitsvektor von f in t**.

(3) Bemerkung. Offenbar ist f differenzierbar in t genau dann, wenn $\lim\limits_{h \to 0, h \neq 0} \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$ existiert. Dieser Grenzwert, wenn er existiert, ist $f'(t)$ aus (2).

Beispiele.

- Für $a, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, ist $f(t) := a + tv$, $t \in \mathbb{R}$, eine **Gerade** durch a in Richtung v. Der Tangentialvektor $f'(t) = v$ und der Tangenteneinheitsvektor $\frac{1}{\|v\|_2} v$ sind an allen Kurvenpunkten gleich.
- Für $r > 0$ ist $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (r \cos t, r \sin t)$, eine **Kreislinie** um 0 mit Radius r. Der Tangentialvektor lautet $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$. Da $\|f(t)\|_2 = \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} = r$, ist $(-\sin t, \cos t)$ der Tangenteneinheitsvektor.



- Für $r > 0$ und $c > 0$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) := (r \cos t, r \sin t, ct)$, eine **Schraubenlinie** mit $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c)$ und $\|f'(t)\|_2 = \sqrt{r^2 + c^2}$.
- Verschiedene Kurven mit gleicher Spur sind z.B.
  - $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos t, \sin t)$

– $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos 3t, \sin 3t)$
– $f : [0, \pi[\to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos 2t, \sin 2t)$

(4) Bemerkung. Sei $f : I \to X$ eine Kurve. Dann ist

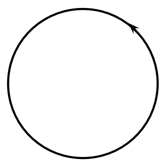
$$g : I \to \mathbb{R} \times X, \quad t \mapsto (t, f(t))$$

ebenfalls eine Kurve mit Spur g = Graph f. Auf diese Weise ist der Graph einer auf einem Intervall definierten stetigen Funktion als Spur einer Kurve in $\mathbb{R}^2$ anzusehen.

(5) Definition. Sei $f : I \to X$ eine Kurve. Dann heißt $x \in X$ ein **Doppelpunkt** von f, falls $s, t \in I$ existieren mit $s \neq t$ und

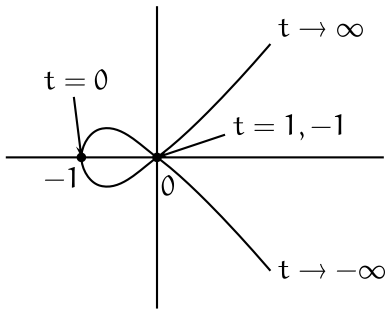
$$x = f(s) = f(t).$$

Beispiele. • Jeder Punkt von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist Doppelpunkt.



Der Kreis wird unendlich oft durchlaufen.
Daher ist jeder Punkt ein Doppelpunkt.

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (t^2 - 1, t^3 - t)$ hat genau einen Doppelpunkt, nämlich $0 = f(1) = f(-1)$.

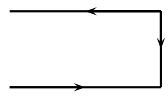


Definition. Orientierung einer Kurve. Sei $f : I \to X$ eine Kurve. Man sagt "$f(s)$ liegt vor $f(t)$", wenn $s < t$ ist (auch wenn $f(s) = f(t)$ sein sollte). Ist $I = [a, b]$, so heißen $f(a)$ Anfangspunkt und $f(b)$ Endpunkt der Kurve.

Jede Kurvenspur kann in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Zum Beispiel durchläuft $]a, b] \to X$, $t \mapsto f(a + b - t)$ die Spur von $f : [a, b[\to X$ in umgekehrter Richtung.

(6) Definition. Sei $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Dann heißt $t \in I$ eine **singuläre Stelle** von f, falls $f'(t) = 0$. Ist f stetig differenzierbar und $f'(t) \neq 0$ $\forall t$, dann heißt f **regulär**. Ist $I = [a, b]$ und $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = b$ eine Zerlegung von I derart, dass $f|_{[t_j, t_{j+1}]}$ regulär ist für $j = 0, \ldots, l - 1$, dann heißt f **stückweise regulär**.

Beispiele. • $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2-1, t^3-t)$ ist setig differenzierbar mit $f'(t) = (2t, 3t^2-1) \neq (0,0) = 0\ \forall t$. Daher ist f regulär.

-  ist die Spur in $\mathbb{R}^2$ einer stückweise regulären Kurve.

- Die Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos t, \sin t)$ ist regulär. Aber $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) := (\cos t^2, \sin t^2)$ ist nicht regulär mit gleicher Spur, denn $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R})$ ist die Einheitskreislinie und $g'(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$ mit $g'(0) = 0$.

(7) Definition. Parametertransformation. Ist $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ bijektiv und stetig, dann heißt φ **Parametertransformation** von $[a', b']$ nach $[a, b]$. Sei $f : [a, b] \to X$ eine Kurve, dann heißt

$$g : [a', b'] \to X,\ \ g := f \circ \varphi$$

die aus f durch die Transformation φ hervorgegangene Kurve. Offensichtlich ist Spur f = Spur g. Bei einer Parametertransformation bleibt also das geometrische Bild der Kurve unverändert.

φ heißt **C^1-Parametertransformation**, falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind. In diesem Fall ist

$$\varphi'(s) > 0\ \forall s \in [a', b'] \text{ oder } \varphi'(s) < 0\ \forall s \in [a', b']$$

(warum?). Ist $\varphi' > 0$, dann heißt φ **orientierungstreu**.

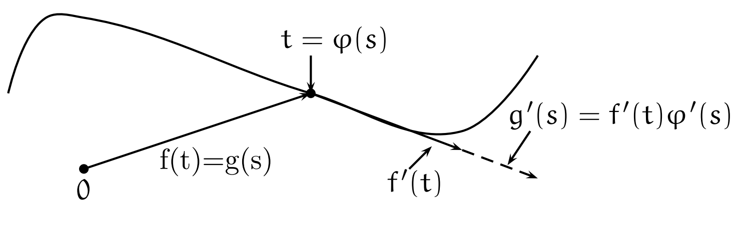
Beispiel. $\varphi : [a, b] \to [a, b]$, $\varphi(s) := a + b - s$ kehrt die Orientierung um, s.o..

(8) Lemma. *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *differenzierbar,* $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ *eine* C^1*-Transformation und* $g := f \circ \varphi$*. Dann gilt*

$$g'(s) = \varphi'(s)\, f'(\varphi(s))\ \forall s \in [a', b'].$$

Beweis. $g = f \circ \varphi = (f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi) \Longrightarrow (f \circ \varphi)'(s) \overset{\text{Def.}}{=} ((f_1 \circ \varphi)'(s), \dots (f_n \circ \varphi)'(s)) = (f_1'(\varphi(s))\varphi'(s), \dots, f_n'(\varphi(s))\varphi'(s)) = (f_1'(\varphi(s)), \dots, f_n'(\varphi(s)))\varphi'(s) \overset{\text{Def.}}{=} f'(\varphi(s))\varphi'(s)$, was offenbar die Kettenregel ist. □

Faßt man t als Zeitparameter auf, so wird die Spur von $f(= f(I))$ zeitllich durchlaufen gemäß $t \mapsto f(t)$. Dabei ist $f'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor im Kurvenpunkt $f(t)$. Er gibt die Richtung und den Betrag der **Momentangeschwindigkeit** an der Stelle $f(t)$ an.



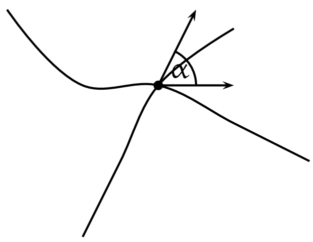
Bei einer C^1-Transformation bleiben die Geschwindigkeitsvektoren parallel $g'(t') \parallel f'(t)$, bei einer orientierungstreuen Transformation bleibt auch die Richtung gleich. Die Beträge der Geschwindigkeiten ändern sich.

(9) Definition. Schnittpunkt und Schnittwinkel. Seien $f : I \to \mathbb{R}^n$ und $g : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **Schnittpunkt** von f und g, wenn ein $t \in I$ und ein $r \in J$ existieren mit

$$x = f(t) = g(r).$$

Der Winkel α zwischen den Tangentenvektoren $f'(t)$ und $g'(r)$ heißt **Schnittwinkel** von f und g in t und r. Vorsicht bei Doppelpunkten! Es gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\langle f'(t), g'(r)\rangle}{\|f'(t)\|_2 \|g'(r)\|_2}$$

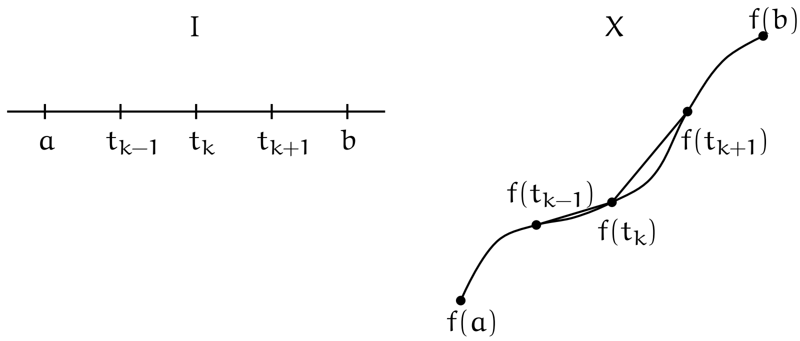


$\boxed{\text{Üb}}$ Man beweise: Unter einer orientierungstreuen C^1-Transformation von f und g bleibt der Schnittwinkel von f und g in den entsprechenden Parameterstellen unverändert. Schnittpunkt und Schnittwinkel sind also geometrische Invariante.

(10) Definition. Länge einer Kurve. Seien $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, $f : [a, b] \to X$ eine Kurve und $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_l\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Es ist also $a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b$. Dann heißt $|Z| := \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \le k \le l\}$ die **Feinheit der Zerlegung**. Man bezeichnet mit

$$L(f, Z) := \sum_{k=1}^{l} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

die Länge des Polygonzugs, der die Kurvenunkte $f(a), f(t_1), \dots, f(b)$ nacheinander verbindet.



Dann heißt

$$L(f) := \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(f, Z) \quad \in [0, \infty]$$

mit $\mathcal{Z} := \{Z : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$ die **Länge der Kurve** f. Sie heißt **rektifizierbar**, wenn $L(f) < \infty$ ist.

(11) Lemma. *In* (10) *gilt für jedes* $\delta > 0$*:*

$$L(f) = \sup\{L(f,Z) : Z \in \mathcal{Z}, |Z| < \delta\}.$$

Beweis. Sind $Z, Z' \in \mathcal{Z}$ und Z' eine Verfeinerung von Z, dann ist $L(f,Z) \leq L(f,Z')$ wegen der Dreiecksungleichung. Daher gilt

$$L(f) \overset{\text{Def.}}{=} \sup_{Z\in\mathcal{Z}} L(f,Z) = \sup_{Z\in\mathcal{Z},|Z|\leq\delta} L(f,Z).$$

□

Bemerkung. Ist f bezüglich einer Norm $\|.\|$ rektifizierbar, dann auch bezüglich jeder zu $\|.\|$ äquivalenten Norm. Die Länge der Kurve kann für äquivalente Normen jedoch verschieden sein. Im Fall $\dim X < \infty$ sind nach (14.17) alle Normen auf X äquivalent. Für $X = \mathbb{R}^n$ wird im Einklang mit der Anschauung meist die euklidsche Norm $\|.\|_2$ benutzt.

(12) Definition. Für eine Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sei

$$\int_a^b f(t)dt := \left(\int_a^b f_1(t)dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)dt\right).$$

es wird also komponentenweise integriert.

Weil

$$L(f,Z) = \sum_{k=1}^{l} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{l} \left\|\frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right\| (t_k - t_{k-1})$$

ist auf Grund von (11) das folgende Ergebnis anschaulich zu erwarten.

(13) Satz. *Seien* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar und* $\|.\|$ *eine Norm auf* $\mathbb{R}^n$*. Dann ist* f *rektifizierbar und*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\|dt.$$

Beweis. Zunächst ist festzustellen, dass $t \mapsto \|f'(t)\| = (\|.\| \circ f')(t)$ stetig und damit integrierbar über $[a,b]$ ist. — Für $a \leq r < s \leq b$ betrachte

$$I_{rs} := \left|\int_r^s \|f'(t)\|dt - \|f(s) - f(r)\|\right|.$$

$I_{rs} = \left|\int_r^s \left(\|f'(t)\| - \frac{\|f(s)-f(r)\|}{s-r}\right) dt\right| \leq \int_r^s \left|\|f'(t)\| - \frac{\|f(s)-f(r)\|}{s-r}\right| dt \overset{(13.37)}{\leq} \int_r^s \left\|f'(t) - \frac{f(s)-f(r)}{s-r}\right\| dt =$
$\frac{1}{s-r}\int_r^s \|f(s) - f(r) - (s-r)f'(t)\|dt \overset{\text{HDI}}{=} \frac{1}{s-r}\int_r^s \left\|\int_r^s (f'(\tau) - f'(t))d\tau\right\| dt \overset{\text{äquivalente Maximumnorm}}{\leq}$
$\frac{1}{s-r}\int_r^s c\max\left\{\left|\int_r^s (f_j'(\tau) - f_j'(t))d\tau\right| : j\right\} dt \leq \frac{1}{s-r}\int_r^s c\max\left\{\int_r^s |f_j'(\tau) - f_j'(t)|d\tau : j\right\} dt.$

Für $\delta > 0$ sei

$$A_\delta := \max_{j=1,\dots,m} \sup\{|f_j'(\tau) - f_j'(t)| : \tau, t \in [a,b], |\tau - t| \le \delta\}.$$

Weil f_j' stetig ist und $[a,b]$ kompakt ist, ist $f_j'([a,b])$ nach (14.10) kompakt und somit beschränkt. Dies gilt für jedes j. Damit ist $A_\delta < \infty$. Weiter ist $\lim_{\delta\to 0} A_\delta = 0$, weil f_j' auf dem Kompaktum $[a,b]$ nach (14.15) sogar gleichmäßig stetig ist.

Jetzt wird die obige Abschätzung zu Ende geführt:

$$I_{rs} \le \frac{1}{s-r}\int_r^s c(s-r)A_{s-r}dt = c(s-r)A_{s-r}.$$

Damit folgt $I_{t_{k-1}t_k} \le c(t_k - t_{k-1})A_{|Z|}$ $\forall k = 1,\dots,l$ und somit $\left|\int_a^b \|f'(t)\|dt - L(f,Z)\right| = \left|\sum_{k=1}^l I_{t_{k-1}t_k}\right| \le \sum_{k=1}^l c(t_k - t_{k-1})A_{|Z|} = c(b-a)A_{|Z|} \longrightarrow 0$ für $|Z| \to 0$ (s.o.). Dies ergibt mit (11) die Behauptung. □

(14) Beispiele.

(a) Länge eines Kreisbogens in euklidscher Norm: $f : [0,\varphi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (r\cos t, r\sin t) \Longrightarrow f'(t) = r(-\sin t, \cos t) \Longrightarrow \|f'(t)\|_2 = r \Longrightarrow L(f) = \int_0^\varphi \|f'(t)\|dt = r\varphi$.

(b) Länge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: Setze gemäß (4) $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) := (t, f(t)) \Longrightarrow L(g) = \int_a^b \|g'(t)\|_2 dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt$ ist die Länge des Graphen von f.

(15) Satz. *Die Länge einer Kurve ist eine geometrische Invariante, d.h. ist* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *eine stetig differenzierbare Kurve und* $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ *eine* C^1*-Transformation, dann gilt:*

$$L(f) = L(f\circ\varphi).$$

Beweis. $L(f\circ\varphi) = \int_{a'}^{b'} \|(f\circ\varphi)'(s)\|ds \overset{(8)}{=} \int_{a'}^{b'} \|f'(\varphi(s))\||\varphi'(s)|ds \overset{(9.25)}{=} \int_a^b \|f'(t)\|dt = L(f)$. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige (15) allgemein für eine Kurve in einem normierten Raum $f : [a,b] \to (X, \|.\|)$ und eine stetige bijektive Parametertransformation $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$.
Hinweis: Z ist Zerlegung von $[a,b] \Longleftrightarrow \varphi^{-1}(Z) := (\varphi^{-1}(t_0),\dots,\varphi^{-1}(t_l))$ ist Zerlegung von $[a',b']$ und $|Z| \to 0 \Leftrightarrow |\varphi^{-1}(Z)| \to 0$.

(16) Bogenlänge. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Dann heißt

$$l(t) := \int_a^t \|f'(s)\|ds, \quad a \le t \le b,$$

die Bogenlänge. Offenbar ist $l \in C^1[a,b]$ mit $l'(t) = \|f'(t)\| > 0$. Damit ist

$$l^{-1} : [0, L(f)] \to [a,b]$$

eine C^1-Transformation. Eine natürliche Parametrisierung von f erfolgt mittels der Bogenlänge

$$g := f \circ l^{-1}.$$

Hierfür ist $g'(s) = f'(l^{-1}(s))(l^{-1})'(s) = f'(l^{-1}(s))\frac{1}{l'(l^{-1}(s))} = f'(l^{-1}(s))\frac{1}{\|f'(l^{-1}(s))\|}$. Also gilt

$$g'(s) = \frac{f'(l^{-1}(s))}{\|f'(l^{-1}(s))\|}.$$

Das bedeutet, dass die Kurve mit konstanter Bahngeschwindigkeit $\|g'(s)\| = 1 \ \forall s$ durchlaufen wird.

17 Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

Die partielle Ableitung ist eine naheliegende Anwendung des vertrauten Konzepts der Ableitung einer Funktion einer reellen Variablen auf Funktionen mehrerer reeller Variablen. Die Idee der Approximation einer Funktion durch eine affine Funktion führt zum Begriff der Fréchet oder totalen Ableitung. Wie sich herausstellt, besteht ein enger Zusammenhang zwischen den beiden Ableitungsbegriffen.

Partielle Ableitung

(1) Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt eine reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein **skalares Feld** in n Variablen mit **Definitionsbereich** $D_f = D$. Die **Niveaumenge** von f zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist

$$N_{f,c} = N_c := \{x \in D_f : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\}).$$

Beispiele. (1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 x_3 - \frac{2x_2}{1+x_1^2}$. Hierfür ist $N_{f,0} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 x_3 (1 + x_1^2)\}$.

(2) $f : \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}) \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := \frac{x^2+y^2+z^2}{z}$. Hierfür ist $N_{f,0} = \emptyset$ und $N_{f,2} = \{(x, y, z) : z \neq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2z\} = \{z \neq 0 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ ist die Kugeloberfläche oder Sphäre zum Mittelpunkt $(0, 0, 1)$ mit Radius 1 ohne Südpol $(0, 0, 0)$.

(2) Definition. Seien f ein skalares Feld, $x \in D_f$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\partial_v f(x) := \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

sofern der Grenzwert existiert, die **Ableitung von** f **in Richtung** v **an der Stelle** x. Speziell für $v = e_i$ dem i-ter Standardvektor heißt

$$\partial_i f(x) := \partial_{e_i} f(x)$$

die **i-te partielle Ableitung von** f **an der Stelle** x. Andere Bezeichnungen dafür sind

$$\partial_i f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = D_i f(x).$$

Das Feld f heißt **partiell differenzierbar**, wenn $\partial_i f(x)$ existiert für alle $i = 1, \dots, n$ und $x \in D_f$. Weiter heißt f **stetig partiell differenzierbar**, wenn f partiell differenzierbar ist und wenn

$$\partial_i f : D_f \to \mathbb{R}$$

für alle $i = 1, \dots, n$ stetig ist.

(3) Bemerkung. Die **i-te partielle Funktion** von f durch $x \in D_f$ ist definitionsgemäß

$$\xi \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) =: g(\xi)$$

mit Definitionsbereich $\{\xi \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_f\}$. Es gilt offenbar:

$$\partial_i f(x) = g'(x_i).$$

D.h. "man differenziert partiell nach einer Variablen, indem man die übrigen Variablen festhält". Die Differentiationsregeln für Funktionen einer Variablen sind daher anwendbar.

(4) Beispiele.

- $D_f =]0, \infty[\times \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2y^3 + y \ln x$. Hierfür ist $\partial_1 f(x, y)\,(= \partial_x f(x, y) = D_1 f(x, y)) = 2xy^3 + \frac{y}{x}$ und $\partial_2 f(x, y) = 3x^2y^2 + \ln x$.
- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2$ ist stetig partiell differenzierbar mit
$$\partial_i \|x\|_2 = \partial_i \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$
- Ein Feld $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt **radialsymmetrisch**, wenn eine Funktion $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ existiert derart, dass $f(x) = g(\|x\|_2)$. Ist g (stetig) differenzierbar, dann ist f (stetig) differenzierbar mit
$$\partial_i f(x) \overset{\text{Kettenregel}}{=} g'(\|x\|_2) \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$
- Für $n \geq 2$ sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{\|x\|_2^{2n}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

  Behauptung:

  (a) *Es existieren und sind* $\partial_i f(0) = 0 \;\forall i = 1, \dots, n$.

  (b) f *ist nicht stetig in* 0*!*

  Beweis. (a) $\frac{f(0+te_i)-f(0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0$.

  (b) Sei (x_k) die Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x_{ki} := \frac{1}{k} \;\forall i = 1, \dots, n$. Dann ist $\|x_k\|_2 = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{n}}{k}$ und $f(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)^n \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^{2n} = \frac{k^n}{n^n}$. Hiermit folgt, dass f in 0 nicht stetig ist, weil $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, $f(0) = 0$, aber $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty \neq 0$.

  $\square$

(5) Definition. Höhere partielle Ableitungen. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt $(k+1)$-mal **partiell differenzierbar**, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung (es wird insgesamt k-mal abgeleitet, jede Koordinate kann dabei öfters auftreten)

$$\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \cdots \partial_{i_1} f \text{ für } 1 \leq i_j \leq n,\; 1 \leq j \leq k$$

partiell differenzierbar sind. Weiter heißt f k-mal **stetig partiell** differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig sind.

Damit führt man folgende Funktionenräume ein:

$$\begin{aligned} C^0(D) &:= C(D) = \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}, \\ C^k(D) &:= \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ k-mal stetig partiell differenzierbar}\}, \\ C^\infty(D) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D). \end{aligned}$$

Beispiel. $C^2(D) = \{f : D \to \mathbb{R} : f$ stetig, $\partial_i f$ und $\partial_i \partial_j f$ existieren und sind stetig $\forall i, j = 1, \ldots, n\}$.

(6) Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^k(D)$ läßt sich die Reihenfolge von bis zu k partiellen Ableitungen beliebig vertauschen, d.h.*

$$\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} f(x) = \partial_{i_{\pi(1)}} \ldots \partial_{i_{\pi(l)}} f(x)$$

für alle $x \in D$, alle Permutationen π von $\{1, 2, \ldots, l\}$ und alle $l \in \{1, \ldots, k\}$.

Beweis. Offenbar genügt es, den Fall $k = 2$ zu betrachten. Daher genügt es $n = 2$ anzunehmen. Also bleibt $\partial_1 \partial_2 f(a) = \partial_2 \partial_1 f(a)$ für $a \in D \subset \mathbb{R}$ zu zeigen.

Sei $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta\} \subset D$. Sei $x \in U_\delta(a)$. Setze

$$g(t) := f(t, x_2) - f(t, a_2).$$

Nach dem MWS existiert ξ zwischen a_1 und x_1 mit

$$g'(\xi) = \frac{g(x_1) - g(a_1)}{x_1 - a_1},$$

weshalb $f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) = f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) + (x_1 - a_1)(\partial_1 f(\xi, x_2) - \partial_1 f(\xi, a_2))$. Wendet man auf $\partial_1 f(\xi, x_2) - \partial_1 f(\xi, a_2)$ wieder den MWS an, so folgt

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) = f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta)$$

mit einem η zwische a_2 und x_2.

Beginnt man mit $\tilde{g}(t) := f(x_1, t) - f(a_1, t)$ statt mit $g(t)$, so erhält man analog

$$f(x_1, x_2) - f(a, x_2) = f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}),$$

wobei $\tilde{\xi}$ zwischen a_1 und x_1 und $\tilde{\eta}$ zwischen a_2 und x_2 liegt.

Der Vergleich der beiden Gleichungen ergibt $\partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Für $(x_1, x_2) \to (a_1, a_2)$ folgt $(\xi, \eta) \to (a_1, a_2)$ und $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \to (a_1, a_2)$. Weil die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, folgt hieraus

$$\partial_2 \partial_1 f(a_1, a_2) = \partial_1 \partial_2 f(a_1, a_2).$$

□

Bemerkung. Für $f \in C^k(D)$ lassen sich also die partiellen Ableitungen sortieren. Z.B. ist im Fall $k \geq 6$

$$\partial_3 \partial_3 \partial_1 \partial_2 \partial_1 \partial_3 f = \partial_3 \partial_3 \partial_3 \partial_2 \partial_1 \partial_1 f = \partial_3^3 \partial_2 \partial_1^2 f$$

mit $\partial_i^k := \underbrace{\partial_i \ldots \partial_i}_{\text{k-mal}}$.

(7) Definition. Sei f ein partiell differenzierbares skalares Feld. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad } f(x) := \nabla f(x) := (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

der **Gradient von** f in $x \in D_f$.

(8) Beispiel. Sei f radialsymmetrisch, d.h. $f(x) = g(\|x\|_2)$ (siehe (4)). Hierfür ist

$$\text{grad } f(x) = \frac{g'(\|x\|_2)}{\|x\|_2} x$$

parallel zum Ortsvektor x.

(9) Rechenregeln für den Gradienten. *Seien* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbare Skalarfelder und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann rechnet man leicht nach:*

- $\text{grad}(f + \lambda g) = \text{grad } f + \lambda \text{grad } g$ (Linearität)
- $\text{grad}(fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g$ (Produktregel)

(10) Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt $F : D \to \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld auf** D. Gemäß (13.33) und nachfolgender Bemerkung ist $F = (F_1, \dots, F_n)$, wobei das **i-te Komponentenfeld** F_i ein skalares Feld ist. Man beachte, dass bei einem Vektorfeld die Anzahl n der Variablen gleich der Anzahl der Komponenten ist. So ergeben n Skalarfelder zusammen ein Vektorfeld. — Man nennt F **(stetig) partiell differenzierbar**, wenn alls F_i (stetig) partiell differenzierbar sind. Entsprechendes gilt die für höhere Ableitungen.

(11) Definition. Sei F ein partiell differenzierbares Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^3$. Dann heißt der Vektor

$$\text{rot } F(x) := (\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x), \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x), \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x))$$

die **Rotation von** F in x. Damit ist $\text{rot } F : D \to \mathbb{R}^3$ wieder ein Vektorfeld auf D.

(12) Definition. Ein Vektorfeld F auf $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Gradientenfeld**, falls es ein skalares Feld f auf D gibt mit $F = \text{grad } f$.

Offensichtlich macht **grad** aus einem skalaren Feld ein Vektorfeld. Das skalare Feld $U := -f$ heißt **Potenzial** zu F. Das Minuszeichen ist eine Konvention aus der Physik. So weist $F = -\text{grad}\, U$ in die Richtung des stärksten Potenzialabfalls. F heißt **konservatives (Kraft-)Feld** oder **Potenzialfeld**.

Beispiel.
- Für das **Zentralfeld** $F(x) = \frac{\alpha}{\|x\|_2^3} x$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt nach (8)

$$F = -\text{grad } U \text{ mit } U(x) = \frac{\alpha}{\|x\|_2}.$$

  Dabei heißt U **Gravitations- oder Newton Potenzial**, wenn $\alpha = \gamma M$ mit der Gravitationskonstante γ und Zentralmasse M. U heißt **Colomb Potenzial**, wenn $\alpha = f^* Q$ mit der Proportionalitätskonstante f^* und Zentralladung Q. (f^* hängt vom Maßsystem ab.)

- Ist F ein konservatives Kraftfeld, dann gilt nach dem Newtonschen Gesetz für die Teilchenbahn $t \mapsto x(t)$ im Kraftfeld

$$m\ddot{x} = F(x) = -\text{grad } U(x).$$

Hieraus folgt $0 = (m\ddot{x} + \text{grad } U(x)) \cdot \dot{x}$ und somit $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\|\dot{x}(t)\|_2^2 + U(x(t))\right) = 0$ (die entsprechende Differentiationsregel wird noch gezeigt). Längs der Teilchenbahn ist also

$$\underbrace{\frac{m}{2}\|v\|_2^2}_{\text{kinetische Energie}} \quad + \quad \underbrace{U(x)}_{\text{potentielle Energie}} \quad = \quad \text{konstant.}$$

(13) Definition. Sei $F : D \to \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Der Skalar

$$\text{div } F(x) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_i(x)$$

heißt die **Divergenz von** F in x. Damit ist $\text{div } F : D \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld.

(14) Rechenregeln für die Divergenz. Seien F und G Vektorfelder auf D, $\lambda \in \mathbb{R}$ und f ein Skalarfeld auf D. Dann gilt

- $\text{div}(F + \lambda G) = \text{div } F + \lambda \text{ div } G$ (Linearität)
- $\text{div}(f\,F) = \underbrace{\langle \text{grad } f, F\rangle}_{\text{Skalarprodukt}} + f \,\text{div } F$ (Produktregel)

Beweis. $\text{div}(f\,F)(x) = \sum_i \partial_i(f\,F_i)(x) = \sum_i ((\partial_i f(x))F_i(x) + f(x)\partial_i F_i(x))$ zeigt die Produktregel. Die Linearität ist offensichtlich. □

Beispiel. Für das Zentralfeld $G(x) := \frac{1}{\|x\|_2}x$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $G(x) = f(x)F(x)$ mit $f(x) = \frac{1}{\|x\|_2}$ und $F(x) = x$. Nach (8) gilt $\text{grad } f(x) = -\|x\|_2^{-3}x$. Offensichtlich ist $\text{div } F(x) = n$. Daher gilt nach (14): $\text{div}\, G(x) = \langle \text{grad}\, f(x), F(x)\rangle + f(x)\,\text{div}\, F(x) = \langle -\|x\|_2^{-3}x, x\rangle + \frac{1}{\|x\|_2}n = \frac{n-1}{\|x\|_2}$.

(15) Laplaceoperator. Für $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(D)$ und $x \in D$ setzt man $\triangle f(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x)$.

$$\boxed{\triangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2}$$

heißt Laplaceoperator. Es ist $\triangle = \text{div grad}$, denn $\text{div grad} f = \text{div}(\partial_1 f, \ldots, \partial_n f) = \partial_1\partial_1 + \ldots \partial_n\partial_n f = \triangle f$.

(16) Drei fundamentale partielle Differentialgleichungen.

(a) **Potenzialgleichung** oder **Laplacegleichung**

$$\triangle f(x) = 0 \qquad \text{(elliptisch)}$$

für $f \in C^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(b) **Wellengleichung**

$$\partial_t^2 f(x,t) - c^2 \triangle_x f(x,t) = 0 \quad \text{(hyperbolisch)}$$

für $f \in C^2(D \times]0,\infty[)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dabei ist x die Orts- und t die Zeitvariable. Die Konstante $c > 0$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

(c) **Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung**

$$\partial_t f(x,t) - k \triangle_x f(x,t) = 0 \quad \text{(parabolisch)}$$

für $f : D \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dabei ist f einmal stetig partiell differenzierbar nach der Zeit und zweimal nach dem Ort. Die Konstante $k > 0$ heißt Temperaturleitzahl.

(17) Beispiel. Sei f ein radialsymmetrisches Skalarfeld, d.h. $f(x) = g(\|x\|_2)$, s. (4). Weiter sei $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned}
\triangle f(x) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) \overset{(8)}{=} \operatorname{div}\left(\frac{g'(\|x\|_2)}{\|x\|_2}\, x\right) = \\
&\overset{(14)}{=} \left\langle \operatorname{grad} g'(\|x\|_2), \frac{1}{\|x\|_2}\, x \right\rangle + g'(\|x\|_2)\frac{n-1}{\|x\|_2} = \\
&\overset{(8),(14)}{=} \left\langle \frac{g''(\|x\|_2)}{\|x\|_2}\, x, \frac{1}{\|x\|_2}\, x \right\rangle + g'(\|x\|_2)\frac{n-1}{\|x\|_2} = \\
&= g''(\|x\|_2) + \frac{n-1}{\|x\|_2} g'(\|x\|_2).
\end{aligned}$$

Hieraus gewinnt man radialsymmetrische Lösungen der Laplacegleichung, nämlich

$$\triangle \ln(\|x\|_2) = 0 \;\text{ auf }\; \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

$$\triangle(\|x\|_2^{2-n}) = 0 \;\text{ auf }\; \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\; n \geq 3.$$

Fréchet Ableitung

Wir betrachten jetzt vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ und

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$$

eine Funktion von n Veränderlichen und mit m Komponenten $f_j : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f soll in $x_0 \in D$ durch eine affine Funktion approximiert werden. Man vergleiche dazu die analoge Einführung der Ableitung einer skalarwertigen Funktion einer Variablen in Kap. 8.

(18) Definition. Seien $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in D$. Dann heißt f in x_0 **differenzierbar** oder auch total differenzierbar oder **Fréchet differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

gibt derart, dass der folgende Grenzwert

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{\|h\|}\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)\| = 0$$

existiert. Dabei ist $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Offenbar ist $h \mapsto f(x_0) + T(h)$ die approximierende affine Abbildung.

(19) Definition und Satz. *Sei* f *wie in* (18) *und differenzierbar in* x_0. *Dann ist* f *stetig in* x_0 *und partiell differenzierbar in* x_0. Setze

$$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \cdots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

Die reelle $m \times n$-Matrix $J_f(x_0)$ heißt **Jacobi Matrix** oder **Funktionalmatrix von** f **an der Stelle** x_0. *Sie stellt die lineare Abbildung* T *in* (18) *bezüglich der Standardbasen in* $\mathbb{R}^n$ *und* $\mathbb{R}^m$ *dar, d.h.* $T(a) = J_f(x_0)a \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$. *Insbesondere ist* T *eindeutig bestimmt.* T heißt die **Ableitung** (oder **totale** oder **Frechet-Ableitung**) von f in x_0 und wird mit $D_f(x_0)$ bezeichnet. *Also gilt*

$$Df(x_0)(a) = J_f(x_0)a \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Sei $R_1(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)$. Dann gilt: $\|f(x_0+h) - f(x_0)\| = \|R_1(h) + T(h)\| \leq \|R_1(h)\| + \|T(h)\| \xrightarrow{h\to 0} 0$, weil sogar $\frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$ und $T(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$. Letzteres gilt, weil T linear von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist und somit $T(0) = 0$ und T stetig nach (13.36) ist. Also ist f stetig in x_0.

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ eine Matrix, die T bezüglich der Standardbasisen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ darstellt, d.h. $T(h) = Ah$. Damit ist $R_{1i}(te_j) = f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0) - ta_{ij}$. Es folgt

$$\frac{R_{1i}(te_j)}{t} = \frac{f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0)}{t} - a_{ij} \xrightarrow{t\to 0} 0,$$

denn $\left|\frac{R_{1i}(te_j)}{t}\right| \leq \frac{\|R_1(te_j)\|_2}{\|te_j\|_2} \leq c\frac{\|R_1(te_j)\|}{\|te_j\|} \xrightarrow{t\to 0} 0$ wegen der Äquivalenz der Normen und weil f differenzierbar in t_0 ist. Das bedeutet $a_{ij} = \partial_j f_i(x_0)$ mit Zeilenindex i und Spaltenindex j. □

Also ist $h \mapsto f(x_0) + Df(x_0)(h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, die approximierende affine Abbildung für f an der Stelle x_0.

(20) Beispiele.

- Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **affin**, d.h. $f(x) = b + Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $f(x+h) - f(x) = b + A(x+h) - (b + Ax) = Ah$. Daraus folgt insbesondere, dass $\frac{\|f(x+h)-f(x)-Ah\|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$. Daher ist $Df(x)(h) = Ah \; \forall h \in \mathbb{R}^n \; \forall x \in \mathbb{R}^n$. Also ist f an jeder Stelle x differenzierbar mit der konstanten Ableitung
$$J_f(x) = A \;\forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine **quadratische Form**, d.h. $f(x) = \langle x, Ax\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dafür ist $f(x+h) - f(x) = \langle x+h, A(x+h)\rangle - \langle x, Ax\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ah\rangle - \langle x, Ax\rangle = \langle (A+A^T)x, h\rangle + \langle h, Ah\rangle$. Bezeichnet
$$B := \frac{1}{2}(A + A^T)$$
den symmetrischen Anteil von A, dann ist also $f(x+h) - f(x) - 2\langle Bx, h\rangle = \langle h, Ah\rangle$. Da $|\langle h, Ah\rangle| \le \|h\|_2\|Ah\|_2$, folgt $\frac{|\langle h,Ah\rangle|}{\|h\|_2} \le \|Ah\|_2 \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Damit ist gezeigt, dass f an jeder Stelle x differenzierbar ist mit
$$Df(x)(h) = 2\langle Bx, h\rangle \;\forall\, h \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad J_f(x) = \underbrace{2(Bx)^T}_{\text{Zeilenvektor}}\,.$$

(21) Definition und Satz. Sei $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ **differenzierbar**, d.h. in allen Punkten von D differenzierbar. Dann ist
$$Df : D \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \mapsto Df(x),$$
d.h. jeder Stelle in D wird eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ zugeordnet.

Dabei ist $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ein reeller Vektorraum der Dimension nm. Bei der Wahl der Standardbasen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ wird $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ durch $\mathbb{R}^{m,n}$ dargestellt. Alle Normen auf $\mathbb{R}^{m,n}$ sind äquivalent. *Mit Hilfe der Maximumnorm* $\|A\|_\infty := \max_{i,j}|A_{ij}|$ *erkennt man nach (13.18) sofort, dass eine Folge* (A_k) *in* $\mathbb{R}^{m,n}$ *genau dann gegen ein* $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ *konvergiert, wenn komponentenweise Konvergenz*
$$A_{k,ij} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} A_{ij} \quad \forall i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n, \tag{$*$}$$
vorliegt.

Die Funktion f heißt **stetig differenzierbar**, wenn f differenzierbar und Df stetig ist. *Dann ist* f *stetig partiell differenzierbar, wenn* f *stetig differenzierbar ist.*

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus (13.29), (19) und ($*$). □

Die Umkehrung der letzten Aussage gilt auch:

(22) Satz. *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : D \to \mathbb{R}^m$. *Dann gilt:*
$$f \text{ ist stetig partiell differenzierbar} \iff f \text{ ist stetig differenzierbar.}$$

Beweis. Zu $\Leftarrow$ siehe (21). Für $\Rightarrow$ genügt es zu zeigen, dass f differenzierbar ist. Die Stetigkeit von Df folgt dann sofort aus (19) und (21). — Sei $x_0 \in D$. Setze $R_1(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - J_f(x_0)h$. Zu zeigen ist $\frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Wähle die Maximumsnorm in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ (alle Normen sind ja äquivalent). Daher genügt es
$$\frac{|R_{1,i}(h)|}{\|h\|_\infty} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$
für jedes $i = 1,\dots,m$ zu zeigen und es darf o.E. $m = 1$ angenommen werden. Das ist der Fall eines Skalarfeldes. Der Index i fällt weg.

Sei $\delta > 0$ derart, dass $x_0 + h \in D$ für alle h mit $\|h\|_\infty < \delta$. Setze
$$z^0 := x_0,\ z^j := x_0 + \sum_{k=1}^{j} h_k e_k \text{ für } j = 1,\dots,n.$$

Beachte, dass $z^n = x_0 + h$. Wende den MWS auf $g_j(t) := f(z^{j-1} + te_j)$ an. Dann existiert τ_j zwischen 0 und h_j mit $g_j(h_j) = g_j(0) + g_j'(\tau_j)h_j$, d.h.

$$f(z^j) = f(z^{j-1}) + \partial_j f(\eta_j)h_j \text{ mit } \eta_j := z^{j-1} + \tau_j e_j.$$

Hiermit ergibt sich, dass $f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{j=1}^n (f(z^j) - f(z^{j-1})) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\eta_j)h_j$. Somit ist $R_1(h) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\eta_j)h_j - \sum_{j=1}^n \partial_j f(x_0)h_j$, weil $\sum_{j=1}^n \partial_j f(x_0)h_j = J_f(x_0)h$. Daher folgt

$$|R_1(h)| \le \|h\|_\infty \sum_{j=1}^n |\partial_j f(\eta_j) - \partial_j f(x_0)|. \tag{$*$}$$

Nun ist $\eta_j - x_0 = z^{j-1} + \tau_j e_j - x_0 = \sum_{k=1}^{j-1} h_k e_k + \tau_j e_j$, wobei die Summe 0 ist für $j = 1$. Daher gilt $\|\eta_j - x_0\|_\infty \le \|h\|_\infty$. Da die partiellen Ableitungen nach Voraussetzung stetig sind, folgt hieraus $\lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^n |\partial_j f(\eta_j) - \partial_j f(x_0)| = 0$. Daher liefert $(*)$ die Behauptung. □

(23) Beispiel. Die **Polarkoordinaten** lauten

(a) für die Ebene $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. f ist surjektiv, nicht injektiv. Weil $J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ stetig ist, ist f stetig differenzierbar.

(b) für den Raum $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(r, \varphi, \vartheta) := (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$. f ist surjektiv, nicht injektiv. Weil
$$J_f(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$
stetig ist, ist f stetig differenzierbar.

(24) Kettenregel. *Seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $V \subset \mathbb{R}^m$ *offen,* $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^l$ *mit* $f(U) \subset V$ *und* $x \in U$. *Weiter sei* f *differenzierbar in* x *und* g *differenzierbar in* $f(x)$. *Dann ist* $g \circ f$ *differenzierbar in* x *und*

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x) &= Dg(f(x)) \circ Df(x) \\ J_{g\circ f}(x) &= J_g(f(x))J_j(x) \quad \text{(Matrixmultiplikation).} \end{aligned}$$

Beweis. Setze $r(h) := f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)$, $s(k) := g(f(x)+k) - g(f(x)) - Dg(f(x))(k)$ für $h \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}^m$. Nach Voraussetzung gelten

$$\frac{r(h)}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ und } \frac{s(k)}{\|k\|} \overset{k\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{$*$}$$

Mit der Abkürzung $k(h) := r(h) + Df(x)(h)$ folgt $(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x) - Dg(f(x)) \circ Df(x)(h) = g(f(x+h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)(h)) = g(f(x) + k(h)) - g(f(x)) - Dg(f(x))(k(h) - r(h)) = s(k(h)) + Dg(f(x))(r(h))$.

Folglich ist $\frac{1}{\|h\|}\|s(k(h)) + Dg(f(x))(r(h))\| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ zu zeigen. Es wird etwas mehr gezeigt:

(1) $\frac{1}{\|h\|}\|Dg(f(x))(r(h))\| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

(2) $\frac{1}{\|h\|}\|s(k(h))\| \xrightarrow{h\to 0} 0$

Zu (1) ist zu bemerken, dass $\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$ nach $(*)$ und $Dg(f(x))(k) \xrightarrow{k\to 0} 0$ nach (13.36). Daraus folgt (1) mit $k := \frac{r(h)}{\|h\|}$. — Zum Beweis von (2) stellt man zunächst fest, dass $\frac{\|k(h)\|}{\|h\|} \le \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} + \left\| Df(x)\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right\|$, weil $Df(x)$ linear ist und weil die Dreiecksungleichung gilt. Für $h \to 0$ verschwindet der erste Summand nach $(*)$. Der zweite Summand bleibt nach (13.36) und (13.38)(iii) dabei beschränkt. Also bleibt $\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}$ beschränkt für $h \to 0$. Daraus folgt insbesondere, dass $k(h) \to 0$ für $h \to 0$. Nun ist $s(k(h)) = 0$ für $k(h) = 0$. Für $k(h) \neq 0$ schreibt man $\frac{\|s(k(h))\|}{\|h\|} = \frac{\|s(k(h))\|}{\|k(h)\|} \cdot \frac{\|k(h)\|}{\|h\|}$. Hieraus folgt (2), weil der erste Faktor aufgrund von $(*)$ für $h \to 0$ verschwindet.

Abschließend bleibt zu bemerken, dass sich die darstellende Matrizen bei Komposition der linearer Abbildungen multiplizieren. □

(25) Bemerkungen.

- Da $J_f(x) = (\partial_j f_i(x))_{ij}$ (siehe (19)), lautet die Kettenregel $J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$ explizit

$$\boxed{\partial_j(g\circ f)_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g_i(f(x))\partial_j f_k(x) \quad \text{für } 1 \le i \le l,\ 1 \le j \le n}$$

- Für den Spezielfall einer Kurve $f : I \to \mathbb{R}^m$ (gilt auch für ein nicht offenes Intervall I), und einem Skalarfeld $g : V \to \mathbb{R}$, d.h. $n = 1$ und $l = 1$, lautet die Kettenregel

$$g\circ f : I \to \mathbb{R} \text{ und } (g\circ f)'(t) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g(f(t)) f_k'(t) = \langle \text{grad } g(f(t)), f'(t)\rangle.$$

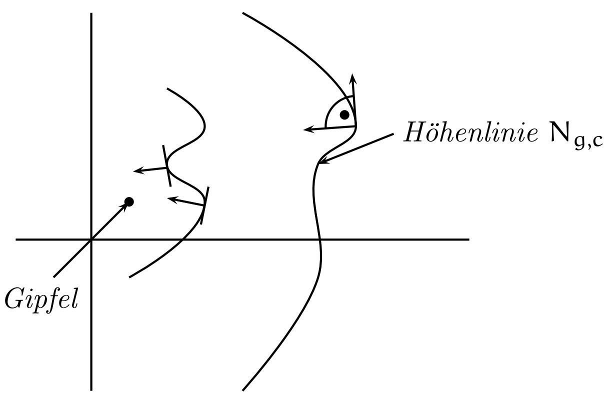
  Siehe das zweite Beispiel zu (12).

(26) Lemma und Definition. *Seien* $V \subset \mathbb{R}^m$ *offen,* $g : v \to \mathbb{R}$ *ein differenzierbares Skalarfeld,* $f : I \to \mathbb{R}^n$ *eine differenzierbare Kurve,* $c \in \mathbb{R}$ *und*

$$f(I) \subset N_{g,c},$$

d.h. f *verläuft ganz in der Niveaumenge von* g *zum Niveau* c*. Dann steht der Gradient von* g *in* $f(t)$ *senkrecht auf dem Tangentenvektor* $f'(t)$ *von* f *in* t*:*

$$\langle \text{grad } g(f(t)), f'(t)\rangle = 0 \quad \forall t \in I.$$



Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** an $N_{g,c}$ in $x \in V$, falls grad $g(x) \neq 0$ und

$$\langle \operatorname{grad} g(x), v \rangle = 0.$$

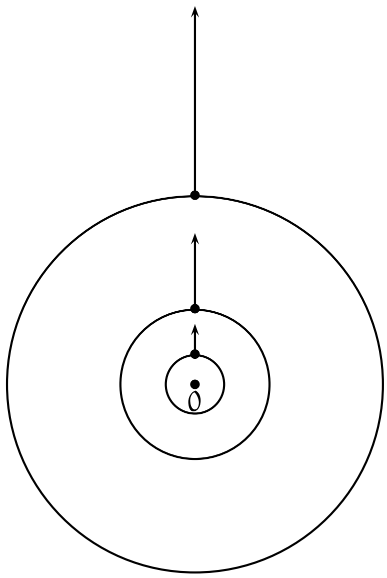
Weiter heißen

$$T_{g,x} := \{v \in \mathbb{R}^n : v \textit{ ist Tangentialvektor an } N_{g,c} \textit{ in } x \in V\} = \{\operatorname{grad} g(x)\}^{\perp}$$

der **Tangentialraum** von $N_{g,c}$ in x und $x + T_{g,x}$ die **Tangentialhyperebene** an $N_{g,c}$ in x. *Offensichtlich ist* $\dim T_{g,c} = n - 1$.

Beweis. $g(f(t)) = c \ \forall t \in I \Longrightarrow (g \circ f)'(t) = 0 \ \forall t \Longrightarrow$ Behauptung nach (25). □

Beispiel. Sei $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $N_{g,1}$ die Einheitssphäre um 0 im Raum und grad $g(x, y, z) = 2(x, y, z)$ ist zweimal der Ortsvektor.



18 Mittelwertsatz und Taylorentwicklung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

(1) Satz. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $x \in D$*,* $f : D \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* x *und* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*. Dann existiert und ist die Ableitung von* f *in Richtung* v *an der Stelle* x *gleich*

$$\partial_v f(x) = \langle \textit{grad } f(x), v \rangle.$$

Beweis. Sei $h(t) := x + tv$ und $\delta > 0$ so klein, dass $h(t) \in D$ für $|t| < \delta$. Mit der Kettenregel (17.25) folgt

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle = (f \circ g)'(0) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \overset{\text{Def.}}{=} \partial_v f(x),$$

was die Behauptung ist. □

Sei $\|v\|_2 = 1$ und α der Winkel zwischen $\operatorname{grad} f(x)$ und v. Weil

$$\partial_v f(x) = \|\text{grad } f(x)\|_2 \cos \alpha,$$

ist $\partial_v f(x)$ maximal, falls v die Richtung von grad $f(x)$ ist. Daher zeigt grad $f(x)$ in Richtung des **maximalen Anstiegs**.

Bezeichnung. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $[x; y] := \{ty + (1-t)x : t \in [0, 1]\}$ die **Verbindungsstrecke** von x und y.

(2) Mittelwertsatz für Skalarfelder. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $x, y \in D$ *mit* $[x; y] \subset D$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Dann existiert* $\xi \in [x; y]$ *mit* $\xi \neq x$*,* $\xi \neq y$ *und*

$$f(y) - f(x) = \langle \text{grad } f(\xi), y - x \rangle.$$

Beweis. Sei $g(t) := f(ty + (1-t)x)$. Man wende den MWS (8.16) auf g an. Danach existiert $\tau \in]0, 1[$ mit $g(1) - g(0) = g'(\tau)$. Aufgrund der Kettenregel (17.25) bedeutet dies

$$f(y) - f(x) = \langle \text{grad } f(\tau y + (1-\tau)x), y - x \rangle.$$

□

(3) Korollar. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $[x; y] \subset D$ *und* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty \leq c\|y - x\|_1 \leq nc\|y - x\|_\infty$$

mit $c := \max_{\xi \in [x;y]} \|J_f(\xi)\|_\infty$.

Beweis. Das Maximum über ξ existiert, weil $\xi \mapsto \|J_f(\xi)\|_\infty$ stetig auf dem Kompaktum $[x;y]$ ist. — Nach (2) existiert für jedes $i \in \{1,\dots,m\}$ ein $\xi_i \in [x;y]$ mit $f_i(y)-f_i(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(\xi_i)(y_j - x_j)$, weshalb $|f_i(y)-f_i(x)| \le \max_{k,\xi} |\partial_k f_i(\xi)| \sum_j |y_j - x_j| = \max_{k,\xi} |\partial_k f_i(\xi)| \|y-x\|_1$. Hieraus folgt die Behauptung. Man beachte, dass generell $\|.\|_1 \le n\|.\|_\infty$. □

(4) Definition. Multiindizes. Ein Tupel $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt Multiindex. Dafür sei

- $|\nu| := \sum_{i=1}^n \nu_i$
- $\nu! := \prod_{i=1}^n \nu_i!$.

Seien $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0^n$. Dafür definiert man:

- $\nu + \mu \in \mathbb{N}_0^n$ mit $(\nu+\mu)_i := \nu_i + \mu_i \ \forall i$.
- $\mu \le \nu :\Longleftrightarrow \mu_i \le \nu_i \ \forall i$. *Offenbar ist* $\mu \le \nu$ *genau dann, wenn* $\nu = \mu + \kappa$ *mit einem* $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$.
- $\binom{\nu}{\mu} := \prod_{i=1}^n \binom{\nu_i}{\mu_i}$ für $\mu \le \nu$.

Außerdem benutzt man die Schreibweisen:

- $x^\nu := \prod_{i=1}^n x_i^{\nu_i}$ für $x \in \mathbb{R}^n$.
- $\partial^\nu f := \partial_1^{\nu_1} \dots \partial_n^{\nu_n} f$ für $f \in C^{|\nu|}(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(5) Lemma. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^k(D)$, $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ *mit* $[x; x+h] \subset D$ *und* $g(t) := f(x+th)$, $t \in [0,1]$. *Dann ist* $g \in C^k[0,1]$ *mit*

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_k} \dots h_{i_1} = \sum_{|\nu|=k} \frac{k!}{\nu!} \partial^\nu f(x+th) h^\nu.$$

Beweis. Wiederholte Anwendung der Kettenregel (17.25) auf $g^{(0)}(t) = f(x+th)$ ergibt $g^{(1)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_1}$, $g^{(2)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2}^n \partial_{i_2} \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_2} h_{i_1}$ und so fort. Damit beweist man mit vollständiger Induktion

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_k} \dots h_{i_1}.$$

Für $(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k$ ist $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f = \partial^\nu f$ wegen (17.6), wobei

$$\nu_1 = |\{\kappa : i_\kappa = 1, \kappa \in \{1,\dots,k\}|, \ \nu_2 = |\{\kappa : i_\kappa = 2, \kappa \in \{1,\dots,k\}|, \dots$$

Zu einem bestimmten $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es offenbar $\frac{k!}{\nu_1! \cdot \ldots \cdot \nu_n!}$ Tupel $(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k$ mit dieser Eigenschaft. □

(6) Taylorformel für Skalarfelder. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{k+1}(D)$ *und* $h \in \mathbb{R}^n$ *mit* $[x; x+h] \subset D$. *Dann existiert ein* $\xi \in [x; x+h]$, $\xi \neq x$, $\xi \neq x+h$ *mit*

$$f(x+h) = \underbrace{\sum_{|\nu|\le k} \frac{1}{\nu!}\partial^\nu f(x) h^\nu}_{=:T^k_{f,x}\ \textbf{k-tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\sum_{|\nu|=k+1} \frac{1}{\nu!}\partial^\nu f(\xi) h^\nu}_{\text{Darstellung von } R_{k+1}(h)\ \textbf{nach Lagrange}},$$

wobei $R_{k+1}(h) := f(x+h) - T^k_{f,x}(h)$ *das* ***Restglied*** *ist.*

Beweis. Sei $g(t) := f(x+th)$. Nach der Taylorformel für **eine** Variable mit dem Restglied nach Lagrange aus (10.20) existiert $\tau \in]0,1[$ mit $f(x+h) = g(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\tau) \overset{(5)}{=} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{|\nu|=j} \frac{j!}{\nu!} \partial^\nu f(x) h^\nu + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{|\nu|=k+1} \frac{(k+1)!}{\nu!} \partial^\nu f(x+\tau h) h^\nu$. □

(7) Satz. ***Ordnung des Restglieds.*** *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^k(D)$, $x \in D$ *und* $\delta > 0$ *mit* $U_\delta(x) \subset D$. *Dann gilt für das Restglied* $R_{k+1}(h) = f(x+h) - T^k_{f,x}(h)$*:*

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0, \|h\|<\delta} \frac{R_{k+1}(h)}{\|h\|^k} = 0.$$

Man beachte, dass f *"nur"* k*-mal stetig differenzierbar vorausgesetzt ist.*

Beweis. Für $k = 0$ gilt $R_1(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{\|h\|^0} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, weil f stetig ist. — Für $k \ge 1$ gilt nach (6)

$$f(x+h) = T^{k-1}_{f,x}(h) + \sum_{|\nu|=k} \frac{1}{\nu!}\partial^\nu f(\xi) h^\nu = T^k_{f,x}(h) + \sum_{|\nu|=k} \frac{1}{\nu!}(\partial^\nu f(\xi) - \partial^\nu f(x)) h^\nu.$$

Daher ist $R_{k+1}(h) = f(x+h) - T^k_{f,x}(h) = \sum_{|\nu|=k} \frac{1}{\nu!}(\partial^\nu f(\xi) - \partial^\nu f(x)) h^\nu$. Nun ist $|h^\nu| \le (\|h\|_\infty)^k$ und es gilt $|\partial^\nu f(\xi) - \partial^\nu f(x)| \to 0$ für $h \to 0$, weil $\|\xi - x\| = \tau\|h\|$ und $\partial^\nu f$ stetig ist. Daraus folgt die Behauptung. □

(8) Der wichtige Fall $k = 2$**.** Für $f \in C^2(D)$ ist nach (5) und (6) $f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) h_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j + R_3(h)$, d.h.

$$f(x+h) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, H_f(x) h\rangle + R_3(h),$$

wobei

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x) & \partial_1\partial_2 f(x) & \cdots & \partial_1\partial_n f(x) \\ \partial_2\partial_1 f(x) & \partial_2^2 f(x) & \cdots & \partial_2\partial_n f(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(x) & \cdots & \cdots & \partial_n^2 f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

die **Hesse Matrix von** f **in** x ist. Nach dem Satz von Schwarz ist $H_f(x)^T = H_f(x)$, d.h. $H_f(x)$ ist symmetrisch.

(9) Definition. Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in D$. Dann heißt x_0 ein **lokales Minimum** von f, wenn eine Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f(x) \geq f(x_0) \ \forall x \in U \cap D.$$

Ein **lokales Maximum** ist entsprechend definiert. Ein **lokales Extremum** ist entweder ein lokales Minimum oder lokales Maximum. — Ein lokales Extremum heißt **isoliert**, wenn

$$f(x) \neq f(x_0) \ \forall x \in U \cap D, \ x \neq x_0.$$

(10) Definition und Lemma. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : D \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbar.* Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt **stationärer Punkt** von f, wenn $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$. *Es gilt:*

$$x_0 \textit{ ist ein lokales Extremum} \implies x_0 \textit{ ist ein stationärer Punkt.}$$

Ist x_0 stationär, aber kein lokales Extremum, dann heißt x_0 ein **Sattelpunkt** von f.

Beweis. Für $\delta > 0$ klein genug ist $x_0 + te_j \in D$ für $t \in]-\delta, \delta[$ und $g(t) := f(x_0 + te_j)$ hat nach Voraussetzung ein lokales Extremum in $t = 0$. Daher ist nach (8.12) $\partial_j f(x_0) = g'(0) = 0$. Dies gilt für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. □

(11) Definition. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt

- **positiv definit**, falls $h^T A h > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist.
- **positiv semidefinit**, falls $h^T A h \geq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$ ist.
- **negativ (semi)definit**, falls $-A$ positiv (semi)definit ist.
- **indefinit**, falls A weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist, d.h. wenn $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $h_1^T A h_1 > 0$ und $h_2^T A h_2 < 0$.

In der linearen Algebra beweist man für symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$\begin{aligned} A \text{ positiv definit} &\iff \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv.} \\ A \text{ positiv semidefinit} &\iff \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind nichtnegativ.} \end{aligned}$$

(12) Lemma. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f \in C^2(D)$ *und* $x_0 \in D$. *Dann gelten:*

(a) x_0 *ist ein lokales Minimum* $\implies x_0$ *ist stationär und* $H_f(x_0)$ *ist positiv semidefinit.*

(b) x_0 *ist stationär und* $H_f(x_0)$ *ist positiv definit* $\implies x_0$ *ist ein isoliertes lokales Minimum.*

Für lokale Maxima gelten die entsprechenden Aussagen.

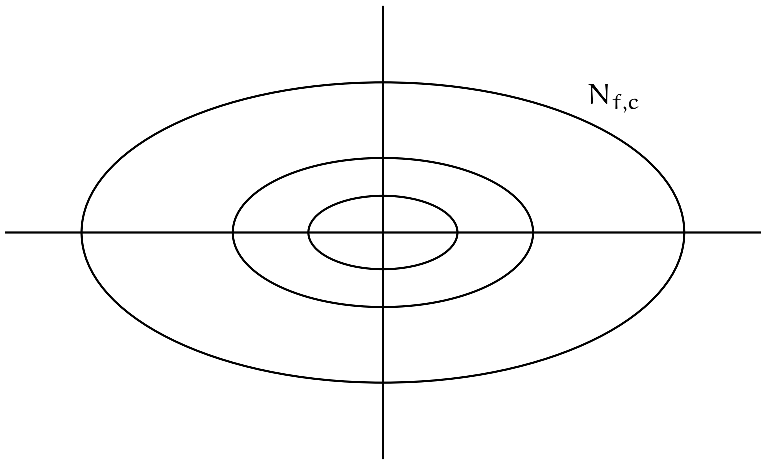
Beweis. (a) Nach (10) ist x_0 stationär. Sei $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $g(t) := f(x_0 + th)$ mit $|t| < \delta$ für $\delta > 0$ hinreichend klein. Offenbar ist 0 ein lokales Minimum von g. Nach (8.20) ist daher $0 = g'(0)$ und $0 \leq g''(0) = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j f(x_0) h_i h_j = h^T H_f(x_0) h$.

(b) Da x_0 stationär ist, ist grad $f(x_0) = 0$. Nach (6) ist daher $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} h^T H_f(x_0) h + R_3(h) = \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} \frac{h^T}{\|h\|} H_f(x_0) \frac{h}{\|h\|} + \frac{R_3(h)}{\|h\|^2} \right)$ für $h \neq 0$. Nun nimmt $\frac{1}{2} \frac{h^T}{\|h\|} H_f(x_0) \frac{h}{\|h\|}$ als stetige Funktion von h einen minimalen Wert α auf der Einheitssphäre an, weil diese kompakt ist. Es ist $\alpha > 0$, da $H_f(x_0)$ positiv definit ist. Damit ist $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \|h\|^2 \left(\alpha + \frac{R_3(h)}{\|h\|^2} \right)$. Nach (7) existiert $\delta > 0$ derart, dass $\frac{|R_3(h)|}{\|h\|^2} < \alpha$ für $0 < \|h\| < \delta$. Es folgt $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < \|h\| < \delta$.

Für lokale Maxima erhält man die entsprechenden Aussagen, wenn man f durch $-f$ ersetzt. □

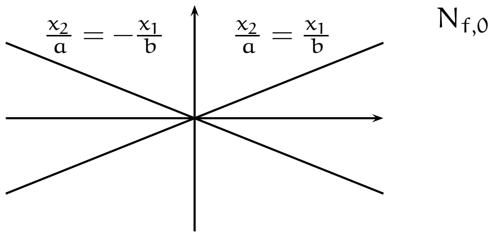
(13) Beispiele.

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) := \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$ für $a, b > 0$. Dann ist $N_{f,c} = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = c \right\}$ für $c > 0$ eine Ellipse und graph f ein **elliptisches Parabolid** im $\mathbb{R}^2$. Weiter ist $N_{f,0} = \{0\}$ und $N_{f,c} = \emptyset$ für $c < 0$.



Da grad $f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2x_2}{b^2} \right)$, ist grad $f(x_1, x_2) = 0$ genau dann, wenn $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Also ist der Ursprung der einzige stationärer Punkt. Weiter ist $H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}$ konstant und offenbar positiv definit. Daher ist 0 ein isoliertes lokales Minimum, sogar das einzige Extremum.

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) := \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}$ für $a, b > 0$. Dann ist $N_{f,c} = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = c \right\}$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Hyperbel $\{xy = c\}$ mit $x = \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}$ und $y = \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}$ und graph f ein **hyperbolisches Parabolid**. $N_{f,0}$ ist ein sich schneidendes Geradenpaar.



Offenbar ist grad $f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, -\frac{2x_2}{b^2}\right) = 0$ genau dann, wenn $(x_1, x_2) = (0, 0)$, d.h. der Ursprung ist der einzige stationäre Punkt. Weiter ist $H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix}$ konstant und offenbar indefinit. Also ist 0 kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt.

- Im semidefiniten Fall ist an der Hessematrix nicht erkennbar, ob ein Extremum vorliegt oder nicht. Seien

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^4 \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_1, x_2) := x_1^2 \\ h &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^3. \end{aligned}$$

Dafür sind

grad $f(x_1, x_2) = (2x_1, 4x_2^3),\ H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$

grad $g(x_1, x_2) = (2x_1, 0),\ H_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

grad $h(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2^2),\ H_h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}$.

Insbesondere ist für alle drei skalaren Felder f, g und h der Ursprung 0 ein stationärer Punkt mit gleicher Hessematrix diag$(2, 0)$. Aber f hat ein isoliertes lokales Minimum in 0, g hat ein nicht isoliertes lokales Minimum in 0 und h hat einen Sattelpunkt in 0.

(14) Bemerkungen.

(a) Die Taylorentwicklung für vektorwertige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ erfolgt komponentenweise. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f_i \in C^{k+1}(D)$. Dann ist $f_i(x + h) = T^k_{f_i,x}(h) + R_{i,k+1}(h),\ i = 1, \dots, m$. Setzt man $\partial^\nu f(x) := (\partial^\nu f_1(x), \dots, \partial^\nu f_m(x))$, so faßt man zusammen

$$f(x + h) = \sum_{|\nu| \le k} \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f(x) h^\nu + R_{k+1}(h).$$

Es gilt weiter $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\|R_{k+1}(h)\|}{\|h\|^k} = 0$ nach (7). **Beachte** jedoch, dass für die Darstellung des Restglieds gemäß **Lagrange** (6) für jede Komponente $R_{i,k+1}(h)$ ein eigener Zwischenwert ξ_i nötig ist.

(b) Die Restglieddarstellung nach **Cauchy** (das ist die Darstellung in Integralform) erhält man, indem man im Beweis von (6) für die Taylorentwicklung von g die Restglieddarstellung in Integralform $\frac{1}{k!} \int_0^1 (1 - t)^k g^{(k+1)}(t) dt$ (10.19) verwendet. Mit (5) folgt

$$R_{k+1}(h) = \sum_{|\nu| = k+1} \frac{h^\nu}{\nu!} \left(\int_0^1 (1 - t)^k \partial^\nu f(x + th) dt \right).$$

Diese gilt auch für vektorwertige f, wenn man die Integration komponentenweise versteht.

19 Implizite Funktionen

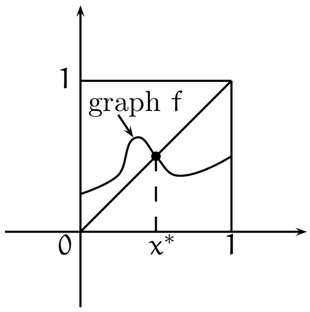
(1) Definition. Sei X eine Menge und $f : X \to X$. Dann heißt $x^* \in X$ ein **Fixpunkt** von f, wenn

$$f(x^*) = x^*.$$

Für $x_0 \in X$ heißt $x_{k+1} := f(x_k)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ die **Fixpunktiteration** mit Anfangspunkt x_0.

(2) Beispiele.

(a) *Sei* $X = [0, 1]$ *und* f *stetig. Dann hat* f *einen Fixpunkt.*



Beweis. Betrachte $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := x - f(x)$. Es gilt: $g(0) = -f(0) \leq 0$ und $g(1) = 1 - f(1) \geq 0$. Nach dem ZWS (7.17) existiert $x^* \in [0, 1]$ mit $g(x^*) = 0$, d.h. $f(x^*) = x^*$. □

(b) Sei $g : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : C[a, b] \to C[a, b]$ und

$$f(x)(t) := \alpha + \int_a^t g(s, x(s))ds.$$

Sei x^* ein Fixpunkt von f, d.h.

$$x^*(t) = \alpha + \int_a^t g(s, x^*(s))ds \ \ \forall t \in [a, b].$$

Der Integrand $s \mapsto g(s, x^*(s))$ ist als Komposition stetiger Abbildungen stetig. Nach (9.21) ist x^* differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto g(t, x^*(t))$. Außerdem ist $x^*(a) = \alpha$. Daher ist x^* eine Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$x' = g(t, x)$$

mit Anfangswert $x(a) = \alpha$.

(3) Definition. Seien X, Y metrische Räume. Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Lipschitz stetig** mit **Lipschitz Konstante** $L \geq 0$, falls

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq L d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Falls $X = Y$ und $L < 1$ ist, heißt f eine **Kontraktion**.

Bemerkung. *Ist* f *Lipschitz stetig, dann ist* f *gleichmäßig stetig.* Denn zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\epsilon}{L}$. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d(x_1, x_2) < \delta$: $d(f(x_1), f(x_2)) < L\delta = \epsilon$.

(4) Banachscher Fixpunktsatz. *Sei* X *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : X \to X$ *eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante* $L < 1$. *Dann gilt:*

(i) f *hat genau einen Fixpunkt* x^*.

(ii) *Die Fixpunktiteration* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert für jeden Anfangswert gegen* x^*. *Dabei gilt die "Fehlerabschätzung"*
$$d(x_k, x^*) \leq \frac{L}{1 - L} d(x_{k-1}, x_k).$$

Beweis. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Da $d(x_k, x_{k+1}) = d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq L d(x_{k-1}, x_k)$ folgt mit vollständiger Induktion sofort

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq L^k d(x_0, x_1); \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Hieraus ergibt sich für $k, l \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$d(x_k, x_{k+l}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} d(x_{k+j}, x_{k+j+1}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} L^{k+j} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) L^k \sum_{j=0}^{l-1} L^j \leq d(x_0, x_1) \frac{L^k}{1 - L} \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist (x_k) eine Cauchy Folge und es existiert $x \in X$ mit $x_k \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} x$. Hieraus folgen $f(x_k) = x_{k+1} \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} x$ und $f(x_k) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$, weil f stetig ist. Damit ist $x = f(x)$ ein Fixpunkt von f.

Nun sei x^* ein weiterer Fixpunkt von f. Dann ist $d(x, x^*) = d(f(x), f(x^*)) \leq L d(x, x^*)$. Weil $L < 1$, folgt daraus $d(x, x^*) = 0$ und somit $x = x^*$.

Schließlich gilt für $k \geq 1$ unter Verwendung der obigen Abschätzung:

$$d(x_k, x_{k+l}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} d(x_{k+j}, x_{k+j+1}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} L^{j+1} d(x_{k-1}, x_k) \leq \frac{L}{1 - L} d(x_{k-1}, x_k) \ \forall l,$$

weshalb $d(x_k, x^*) = \lim\limits_{l \to \infty} d(x_k, x_{k+l}) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k)$. $\square$

Der Vektorraum $\mathbb{R}^{n,n}$ der reellen $n \times n$-Matrizen kann in natürlicher Weise durch Aneinanderhängen aller n Zeilen zu einem Zeilenvektor der Länge n^2 mit dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden. Nach (14.17) sind alle Normen auf $\mathbb{R}^{n,n}$ äquivalent. Für das Folgende wird $\mathbb{R}^{n,n}$ mit der Maximumnorm $A \mapsto \|A\|_\infty$ (vgl. (17.21)) versehen.

(5) Satz. (1) $\det : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$ *ist beliebig oft stetig differenzierbar, d.h.* $\det \in C^\infty(\mathbb{R}^{n,n})$.

(2) *$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A$ invertierbar$\}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n,n}$.*

(3) *$GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n,n}$, $A \mapsto A^{-1}$ ist beliebig oft stetig differenzierbar.*

Beweis. (1) Gemäß der aus der linearen Algebra bekannten Leibniz Formel für Determinanten $\det A = \sum_\pi \mathrm{signum}(\pi)\, A_{\pi(1)1} A_{\pi(2)2} \ldots A_{\pi(n)n}$, wobei π eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ ist, ist $\det A$ ein Polynom in den Matrixelementen. Daher ist $\mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$, beliebig oft stetig differenzierbar.

(2) Weiterhin ist aus der Linearen Algebra bekannt, dass $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det A \neq 0$. Also ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Weil $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen ist und det stetig ist, ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ offen.

(3) Für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$ gemäß der **Cramer Regel**, wobei $\tilde{A}$ die zu A **komplementäre** Matrix ist. Dabei hat $\tilde{A}$ folgende Elemente: $\tilde{A}_{ij}$ ist die Determinante derjenigen Matrix, die durch Streichen der j-ten **Zeile** und i-ten **Spalte** aus der Matrix A entsteht, multipliziert mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$. Hieraus folgt mit (1) sofort die Behauptung.

□

(6) Satz von der lokalen Inversen. *Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in D$ und $Df(a)$ bijektiv. Dann existiert ein offenes $U \subset D$ mit $a \in D$ derart, dass $V := f(U)$ offen ist,*

$$U \to V, \; x \mapsto f(x)$$

bijektiv ist und die Umkehrabbildung $g : V \to \mathbb{R}^n$ (d.h. $g(f(x)) = x \; \forall x \in U$) stetig differenzierbar ist. Es folgt für alle $x \in U$: $Df(x)$ ist bijektiv, $Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$ und $J_g(f(x)) = (J_f(x))^{-1}$.

Beweis. (a) Zunächst erfolgt die Reduktion auf den Fall $a = 0$, $f(0) = 0$ und $Df(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$: Setze $\tilde{D} := D - a$, $\tilde{f}(x) := Df(a)^{-1}(f(x + a) - f(a)) \; \forall x \in \tilde{D}$. Dann ist $0 \in \tilde{D}$ und, aufgrund der Kettenregel (17.24) und weil $Df(a)^{-1}$ linear ist (siehe (17.20) erstes Beispiel), $D\tilde{f}(0) = Df(a)^{-1} \circ Df(a) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, wie gewünscht. — Nun ist $f(x) = Df(a)(\tilde{f}(x - a) + f(a))$, weshalb es genügt, die Behauptung für $\tilde{f}$ zu beweisen.

(b) Sei also o.E. $f(0) = 0$ und $Df(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ setze

$$h_y(x) := x - f(x) + y \; \forall x \in D.$$

Dafür gilt: $y = f(x) \iff x = h_y(x)$.

Der Beweis läuft nun auf die Anwendung des Fixpunktsatzes auf h_y hinaus. Zur Prüfung der Voraussetzungen betrachte die Funktion $h : D \to \mathbb{R}^n$, $h(x) := x - f(x)$, die stetig differenzierbar ist mit $J_h(x) = E_n - J_f(x)$ und $J_h(0) = 0$. Weil J_h stetig in 0 ist, existiert $r > 0$ mit $\tilde{U}_r(0) \subset D$ und $\|J_h(\xi)\|_\infty \leq \frac{1}{2n} \; \forall \xi \in \tilde{U}_r(0)$. Wegen (18.3) gilt die Abschätzung $\|h_y(x) - h_y(x')\|_\infty = \|h(x) - h(x')\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|_\infty \; \forall x, x' \in \tilde{U}_r(0)$. Insbesondere ist $\|h(x)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x\|_\infty$, da $h(0) = 0$. Mit $h_y(x) = h(x) + y$ folgt

(1) $\|h_y(x)\|_\infty \leq \|h(x)\|_\infty + \|y\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Sei nun $y \in \tilde{U}_{\frac{r}{2}}(0)$. Dafür ist $\|h_y(x)\|_\infty \leq r$, weshalb $h_y : \tilde{U}_r(0) \to \tilde{U}_r(0)$. Da $\|h_y(x) - h_y(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$, wie oben nachgewiesen, ist h_y eine Kontraktion von $\tilde{U}_r(0)$, was nach (13.25)(ii) vollständig ist. Die Anwendung des Fixpunktsatzes (4) ergibt:

(2) $\forall y \in \tilde{U}_{\frac{r}{2}}(0)\ \exists_1 x \in \tilde{U}_r(0)$ mit $x = h_y(x)$, d.h. $y = f(x)$.

Für dieses x folgt aus (1): $\|x\|_\infty = \|h_y(x)\|_\infty \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, weshalb

(3) $\|x\|_\infty \le 2\|y\|_\infty$ für $y = f(x) \in \tilde{U}_{\frac{r}{2}}(0)$.

Das bedeutet insbesondere, dass $\|x\|_\infty < r$ falls $\|y\|_\infty < \frac{r}{2}$. Setze daher $V := U_{\frac{r}{2}}(0)$ und $U := f^{-1}(V) \cap U_r(0)$. Dann sind V und damit U offen und aus (2) und (3) folgen $0 \in U$, $f(U) = V$ und $f|_U$ injektiv.

(c) Es wird jetzt die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung g in 0 mit $Dg(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ gezeigt. Dazu ist zu zeigen, dass $\frac{1}{\|y\|}\|g(y) - g(0) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(y)\| \to 0$ für $y \to 0$, $y \neq 0$. In der Tat gilt

$$\frac{1}{\|y\|}\|g(y)-g(0)-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(y)\| = \frac{1}{\|y\|}\|g(y)-y\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}\frac{1}{\|x\|}\|x-f(x)\| \overset{(3)}{\le} \frac{2}{\|x\|}\|f(x)-f(0)-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x)\| \overset{y\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

weil dabei $x \to 0$ nach (3). Beachte $f(0) = 0$ und $Df(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

(d) Die Überlegungen bisher zeigen, dass die Umkehrabbildung g existiert und in $f(a)$ differenzierbar ist mit

$$Dg(f(a)) = (Df(a))^{-1},\ J_g(f(a)) = J_g(a)^{-1}.$$

Nun ist die Abbildung $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \det(J_f(x))$ stetig mit $\det J_f(a) \neq 0\ \forall x \in D$. Dann ist $\det J_f(x) \neq 0$ in einer ganzen Umgebung von a. Es ist daher keine Einschränkung anzunehmen, dass $\det J_f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $Df(x)$ bijektiv für alle x und aus (a)–(c) folgt, dass g differenzierbar auf V ist mit $Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$. Mit Aussage (3) in (5) ist $x \mapsto J_f(x)^{-1}$ stetig, weshalb g nach (17.21) stetig differenzierbar ist.

□

(7) Beispiel. Für die Polarkoordinaten (siehe (17.23))

(a) in der Ebene $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ ist $J_f(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ und somit $\det J_f(r,\varphi) = r \neq 0$ für $r \neq 0$. Daher hat f um jeden Punkt (r,φ) mit $r \neq 0$ eine stetig differenzierbare Inverse, obwohl f nicht injektiv ist! Man verifiziert direkt, dass für die offenen Mengen $U :=]0,\infty[\times]0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^2 \setminus ([0,\infty[\times\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ die Abbildung

$$U \to V,\ (r,\varphi) \mapsto f(r,\varphi)$$

bijektiv ist.

(b) $\boxed{\text{Üb}}$ Polarkoordinaten im Raum.

(8) Definition. Seien $n, m, l \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in $(x_0, y_0) \in D$. Betrachte die partielle Abbildung

$$x \mapsto f(x, y_0),$$

die auf der offenen Umgebung $\{x \in \mathbb{R}^n : (x, y_0) \in D\}$ von x_0 definiert ist. Ihre totale Ableitung an der Stelle x_0 existiert und wird mit

$$D_1 f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$$

bezeichnet. Die Bezeichnung D_x für D_1 ist auch üblich. Die zugehörige Jacobi Matrix lautet

$$\partial_1 f(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_l(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{x_n} f_l(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Die Bezeichnung ∂_x für ∂_1 ist ebenfalls üblich. Entsprechend wird

$$D_2 f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$$

–mit der alternativen Bezeichnung D_y– dargestellt durch

$$\partial_2 f(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{y_m} f_1(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} f_l(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{y_m} f_l(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt auch ∂_y statt ∂_2. *Es ist* $\partial_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{l,n}$ *und* $\partial_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{l,m}$ *und es gilt*

$$J_f(x_0, y_0) = (\partial_1 f(x_0, y_0) \;\; \partial_2 f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^{l,m+n}$$

in Blockmatrixschreibweise.

(9) Satz über implizite Funktionen. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *offen und* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar. Sei* $(x_0, y_0) \in D$ *mit* $f(x_0, y_0) = 0$ *und* $\partial_2 f(x_0, y_0)$ *invertierbar. Dann existiert* $W \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $x_0 \in W$ *und eine stetig differenzierbare Funktion*

$$g : W \to \mathbb{R}^m$$

derart, dass $g(x_0) = y_0$, $(x, g(x)) \in D$, $\partial_2 f(x, g(x))$ *invertierbar ist und*

$$\boxed{f(x, g(x)) = 0}$$

für alle $x \in W$. *Es folgt*

$$J_g(x) = -(\partial_2 f(x, g(x)))^{-1} \partial_1 f(x, g(x)) \;\forall x \in W.$$

Beweis. Die Funktion $F : D \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F(x, y) := (x, f(x, y))$ ist stetig differenzierbar, und

$$J_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \partial_1 f(x_0, y_0) & \partial_2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit der Inversen

$$J_F(x_0, y_0)^{-1} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -\partial_2 f(x_0, y_0)^{-1} \partial_1 f(x_0, y_0)) & \partial_2 f(x_0, y_0)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nach (6) existiert $U \subset D$ offen mit $(x_0, y_0) \in U$, $V := F(U)$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbaren lokalen Inversen $G : V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $G(F(x, y)) = (x, y) \;\forall (x, y) \in U$. Für diese gilt $DG(F(x,y)) = DF(x,y)^{-1}$.

Schreibe nun $G(x,y) =: (g_1(x,y), g_2(x,y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Weil $(x_0,y_0) = G(F(x_0,y_0)) = G(x_0,0) = (x_0, g_2(x_0,0))$ gilt

$$y_0 = g_2(x_0,0). \tag{$*$}$$

Weiter ist $F(G(x,y)) = (x,y)$ für alle $(x,y) \in V$. Somit gilt $(x,y) = F(g_1(x,y), g_2(x,y)) = (g_1(x,y), f(g_1(x,y), g_2(x,y)))$, weshalb $x = g_1(x,y)$ und $y = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$. Daher ist

$$y = f(x, g_2(x,y)) \ \forall (x,y) \in V. \tag{$**$}$$

Wähle $W \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $F(x_0,y_0) = (x_0,0) \in W \times Y \subset V$ derart, dass $\partial_2 f(x, g_2(x,0))$ invertierbar ist für alle $x \in W$. Dies ist möglich, weil $\partial_2 f(x_0, g_2(x_0,0)) = \partial_2 f(x_0,y_0)$ invertierbar ist nach Voraussetzung, $x \mapsto \partial_2 f(x, g_2(x,0))$ stetig ist und Aussage (2) in (5) gilt.

Die gesuchte Funktion ist nun $g(x) := g_2(x,0)$ für alle $x \in W$. In der Tat ist $g(x_0) = g_2(x_0,0) = y_0$ nach $(*)$ und $0 = f(x, g_2(x,0)) = f(x, g(x)) \ \forall x \in W$ nach $(**)$.

Die letzte Behauptung folgt, indem man auf $x \mapsto f(x,g(x)) = 0$ die Kettenregel anwendet. Es gilt $0 = Df(x,g(x)) \circ (\mathrm{id}_n, Dg(x)) = (D_1 f(x,g(x)) \circ \mathrm{id}_n + D_2 f(x,g(x)) \circ Dg(x)$, weshalb $-D_1 f(x,g(x)) = D_2 f(x,g(x)) \circ Dg(x)$ und somit $Dg(x) = -(D_2 f(x,g(x)))^{-1} \circ D_1 f(x,g(x))$. $\square$

(10) Zusatz. Eindeutigkeit der Auflösung. *Nach eventueller Verkleinerung von* W *gibt es ein offenes* $Z \subset \mathbb{R}^n$ *mit* $y_0 \in Z$ *derart, dass für jedes* $(x_1,y_1) \in W \times Z$ *mit* $f(x_1,y_1) = 0$ *gilt:*

$$y_1 = g(x_1).$$

Beweis. Sei Z so gewählt, dass $W \times Z \subset U$ mit U aus dem Beweis von (9). Dann gilt: $(x_1,y_1) = G(F(x_1,y_1)) = G(x_1, f(x_1,y_1)) = G(x_1,0) = (g_1(x_1,0), g_2(x_1,0)) = (g_1(x_1,0), g(x_1))$. Daher ist $y_1 = g(x_1)$. $\square$

(11) Zusammenfassung. *Unter den Voraussetzungen von* (9) *läßt sich das Gleichungssystem*

$$f(x,y) = 0$$

von m *Gleichungen in hinreichend kleiner Umgebung* $W \times Z$ *der Nullstelle* (x_0,y_0) *von* f *eindeutig nach* y *auflösen, d.h.*

$$\exists_1 \ g : W \to Z : \quad f(x,g(x)) = 0 \ \forall x \in W.$$

Dabei ist g *automatisch stetig differenzierbar mit*

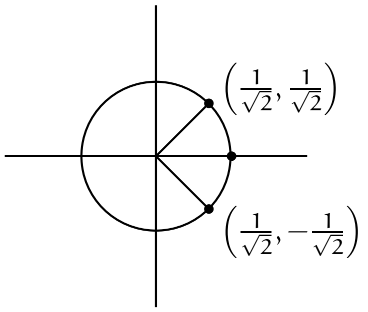
$$J_g(x) = -(\partial_2 f(x,g(x)))^{-1}(\partial_1 f(x,g(x))).$$

(12) Bemerkung. $f(x,y) = 0$ heißt ausgeschrieben

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) &= 0. \end{aligned}$$

Dabei sind $x_1, \ldots, x_n$ als gegeben anzusehen. Damit sind dies m Gleichungen für die m Unbekannten $y_1, \ldots, y_m$.

Beispiel für die einfachste Situation $n = 1$ und $m = 1$. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$, $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Dann folgt aus $x^2 + y^2 - 1 = 0$ die Auflösung $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ für $|x| < 1$. Zur Nullstelle $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ lautet die Auflösung $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ für $|x| < 1$.



Für die Nullstelle $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ist offenbar keine Auflösung in einer Umgebung (!) von 1 möglich (siehe Zeichnung). Dementsprechend ist $\partial_2 f(x, y) = 2y$ und somit $\partial_2 f(1, 0) = 0$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := y + \sin(xy)$. Bestimme die Niveaumenge $N_{f,0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$, das Nullstellengebilde von f.

(13) Parametrisierung einer Niveaumenge $N_{f,c} = \{x \in D_f : f(x) = c\}$ in der Umgebung eines regulären Punktes von f.

Ein Punkt $x_0 \in D_f$ heißt **regulär** für f, wenn x_0 ein innerer Punkt von D_f ist, f in einer Umgebung von x_0 stetig differenzierbar ist und $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ gilt.

Weil $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$, existiert $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\partial_{i_0} f(x_0) \neq 0$. Sei o.E. $i_0 = n$. Schreibe $x = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, y)$ mit $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $y \in \mathbb{R}$. Da $\partial_n f(x_0) \neq 0$, ist (11) anwendbar. Danach ist die Gleichung

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, y) - c = 0$$

eindeutig auflösbar nach y um $x_0 = (\xi_0, y_0)$, d.h. $f(\xi, g(\xi)) = c$, wobei g stetig differenzierbar ist. *Damit gibt es eine Umgebung* U *von* x_0 *derart, dass* $U \cap N_{f,c} =$ *Graph* g.

(14) Definition und Satz. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $\phi : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Ein lokales Minimum von ϕ unter der **Nebenbedingung** $f = 0$ ist ein $x_0 \in D$ derart, dass es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$\phi(x_0) \leq \phi(x) \ \forall x \in U \cap D \cap N_{f,0}.$$

Seien D *offen,* $f, \phi \in C^1(D)$, x_0 *ein lokales Minimum von* ϕ *unter der Nebenbedingung* $f = 0$ *und* $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$. *Dann*

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \operatorname{grad} \phi(x_0) = \lambda \operatorname{grad} f(x_0).$$

λ heißt **Lagrange Multiplikator**.

Beweis. Weil $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$, ist o.E. $\partial_n f(x_0) \neq 0$ (sonst benenne man die Variablen um). Für $x \in \mathbb{R}^n$ schreibe man $x = (\xi, y)$ mit $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$. Nach (9) existiert eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \to \mathbb{R}$, definiert auf einer offenen Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von ξ_0 derart, dass $g(\xi_0) = y_0$ und $f(\xi, g(\xi)) = 0 \ \forall \xi \in W$. Für die Ableitung von g an der Stelle ξ_0 gilt

$$\operatorname{grad} g(\xi_0) = \frac{-1}{\partial_n f(x_0)} \operatorname{grad}_\xi f(x_0). \tag{$*$}$$

Nach Voraussetzung hat $\tilde{\phi} : W \to \mathbb{R}$, $\tilde{\phi}(\xi) := \phi(\xi, g(\xi))$, ein lokales Minimum in ξ_0. Daher ist $\operatorname{grad} \tilde{\phi}(\xi_0) = 0$, d.h. $\operatorname{grad}_\xi \phi(x_0) + \partial_n \phi(x_0) \operatorname{grad} g(\xi_0) = 0$. Setzt man hierin $(*)$ ein, so folgt $\operatorname{grad}_\xi \phi(x_0) = \lambda \operatorname{grad}_\xi f(x_0)$ mit $\lambda := \frac{\partial_n \phi(x_0)}{\partial_n f(x_0)}$. Das liefert die Behauptung. □

Offenbar gilt (14) unverändert für ein lokales Maximum von ϕ unter der Nebenbedingung $f = 0$.

(15) Beispiel. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die quadratische Form $\phi(x) = x^T A x$ mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (siehe (17.20)). Die Nebenbedingung sei $f(x) := \|x\|_2^2 - 1 = x^T x - 1 = 0$. D.h. gesucht sind die lokalen Extrema einer quadratischen Funktion auf der Einheitssphäre. Nach (17.20) ist $\operatorname{grad} \phi(x) = (2Ax)^T$ und $\operatorname{grad} f(x) = (2x)^T$. Auf der Einheitssphäre ist $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$. Nach (14) lauten also die Bestimmungsgleichungenfür die $n+1$ Unbekannten $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ und λ

(1) $2\,Ax_0 = \lambda\, 2x_0$ $\quad$ n Gleichungen

(2) $x_0^T x_0 = 1$ $\quad$ eine Gleichung (die Nebenbedingung).

Die Gleichungen (1) bedeuten, dass λ ein Eigenwert von A und x_0 ein zugehöriger Eigenvektor ist. Mit (2) folgt $x_0^T A x_0 = \lambda x_0^t T x_0 = \lambda$. Daher ist $\max_{\|x\|_2=1} \phi(x) = \lambda_{\max}$ der größte Eigenwert von A und x_0 ein Eigenvektor dazu. Ebenso ist der kleinste Eigenwert von A das Minimum, das ϕ auf der Einheitssphäre annimmt.

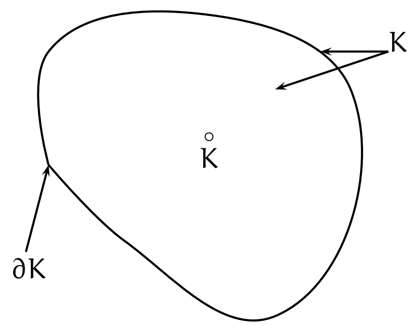
$\boxed{\text{Üb}}$ Finde mit Hilfe von Lagrange Multiplikatoren die Extrema von $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ unter der Nebenbedingung $e^{xy} = x + y$.

(16) Extrema stetiger Funktionen auf Kompakta. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (d.h. beschränkt und abgeschlossen) und $\phi : K \to \mathbb{R}$ stetig. Nach (14.11)

$$\exists\, x \in K \text{ mit } \phi(x) = \inf \phi(K) =: \alpha.$$

Wie ermittelt man das Minimum α und die Minimalstelle $x_{\min} \in K$ mit $\phi(x_{\min}) = \alpha$?

(a) Sei ϕ auf $\mathring{K}$, dem Inneren von K, partiell differenzierbar. Dann ermittle man die stationären



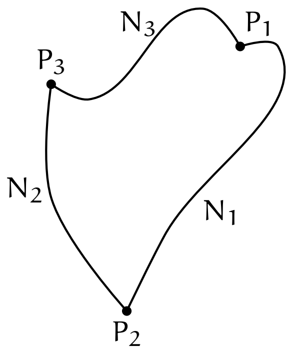
Punkte von ϕ im Inneren von K, d.h. jene $x \in \overset{\circ}{K}$ mit $\operatorname{grad}\phi(x) = 0$. Dies sind die Kandidaten für $x_{\min}$ nach (18.10), die in $\overset{\circ}{K}$ liegen.

(b) Da ∂K kompakt ist, nimmt $\phi|_{\partial K}$ ein Minimum an. Beschreibe ∂K wenn möglich, wenigstens stückweise, als Niveaumenge $N_{f,0}$ für geeignetes f. Dann

- entweder parametrisiere $N_{f,0} \cap U =$ Graph g explizit (siehe (13)) und untersuche $\tilde{\phi}(\xi) := \phi(\xi, g(\xi))$ (anstelle von ϕ) gemäß (a) und (b) oder
- wende die Lagrange Multiplikatormethode an, falls ϕ in stetig differenzierbarer Weise fortsetzbar ist auf einer Umgebung von $N_{f,0}$.

Das ergibt Kandidaten für $x_{\min}$, die in ∂K liegen.

(c) Beachte, dass bei einer stückweisen Beschreibung von ∂K möglicherweise gewisse Randpunktmengen nicht erfasst werden. Diese müssen mit den angegebenen Methoden weiter untersucht werden.



(d) Schließlich vergleiche man die Werte von ϕ an allen Kandidatenstellen, um den kleinsten Wert α zu finden.

$\boxed{\text{Üb}}$ Wie lauten die Maxima und Minima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ auf der halben abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$?

20 Parameterabhängige Integrale

(1) Lemma. *Seien* X, Y *metrische Räume und* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *stetig bez. der Maximummetrik. Dann ist für jedes* $x \in X$ *die Funktion* $\varphi(x) : Y \to \mathbb{R}$, $\varphi(x)(y) := f(x, y)$, *stetig. Ist* Y *kompakt, dann ist*

$$\varphi : X \to (C(Y), \|.\|_s)$$

stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ fest. Für $y, y_0 \in Y$ gilt $|\varphi(x_0)(y) - \varphi(x_0)(y_0)| = |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \overset{y \to y_0}{\longrightarrow} 0$, weil f stetig in (x_0, y_0) ist. Daher ist $\varphi(x_0)$ stetig in y_0. — Sei nun Y kompakt und sei (x_n) in X mit $x_n \to x_0$. Zu zeigen ist

$$\|\varphi(x_n) - \varphi(x_0)\|_s = \sup_{y \in Y} |f(x_n, y) - f(x_0, y)| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Die Teilmenge $X_0 := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ von X ist kompakt, was sofort aus (14.2) folgt. Dann ist $X_0 \times Y$ kompakt nach (14.9) und somit $f|_{X_0 \times Y}$ gleichmäßig stetig nach (14.15). Das bedeutet: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ mit $|f(x_n, y) - f(x_0, y)| \leq \epsilon$, falls $d((x_n, y), (x_0, y)) = d(x_n, x_0) < \delta$. Für $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \delta\ \forall n \geq N$ folgt daher $|f(x_n, y) - f(x_0, y)| \leq \epsilon\ \forall y \in Y$ und $n \geq N$. Das ist die Behauptung. □

(2) Satz. *Seien* X *ein metrischer Raum und* $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist*

$$F : X \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_a^b f(x, y)dy$$

wohldefiniert und stetig. (Dabei tritt x *im Integral als Parameter auf, über den nicht integriert wird.)*

Beweis. Ist $f(x, y) = \varphi(x)(y)$, dann ist $\varphi(x) \in C[a, b]$ nach (1). Damit ist $\int_a^b \varphi(x)(y)dy$ definiert und $|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^b (\varphi(x) - \varphi(x_0))(y)dy\right| \leq \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|_s (b - a) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ nach (1). □

(3) Satz. *Seien* $D := [a, b] \times [c, d]$ *(ein kompaktes Rechteck),* $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig und* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* $F(x) := \int_c^d f(x, y)dy$.

(a) *Dann ist die Integrationsreihenfolge vertauschbar (Spezialfall des Satzes von Fubini)*

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy.$$

Sei f *nach* x *stetig partiell differenzierbar.*

(b) *Dann ist* F *stetig differenzierbar und Integration und Differentiation sind vertauschbar*

$$F'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)dy.$$

Beweis. (b) Nach dem MWS existiert ξ zwischen x_0 und x_0+h (abhängig von h und y) derart, dass $(*) := \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - \int_c^d \partial_1 f(x_0,y)dy\right| = \left|\int_c^d \left(\frac{f(x_0+h,y)-f(x_0,y)}{h} - \partial_1 f(x_0,y)\right)dy\right| = \left|\int_c^d (\partial_1 f(\xi,y) - \partial_1 f(x_0,y))dy\right|$. Nach (14.15) ist $\partial_1 f$ gleichmäßig stetig auf D. Daraus folgt: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ mit $|\partial_1 f(\xi,y) - \partial_1 f(x_0,y)| \leq \epsilon$ sofern nur $|\xi - x_0| < \delta$. Für $|h| < \delta$ ist daher $|\xi - x_0| < |h| < \delta$ und somit $(*) \leq \epsilon(d-c)$. Für $h \to 0$ ergibt dies $F'(x_0) = \int_c^d \partial_1 f(x_0,y)dy$.

(a) Sei $H(x) := \int_c^d \left(\int_a^x f(t,y)dt\right)dy$. Nach (9.21) ist $x \to \int_a^x f(t,y)dt$ stetig differenzierbar mit Ableitung $f(x,y)$. Daher ist $H'(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ nach (b). Nach dem HDI (9.23) gilt $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b H'(x)dx = H(b) - H(a) = \int_c^d \left(\int_a^b f(t,y)dt\right)dy$ nach Definition von H. □

(4) Beispiel. Die Besselfunktionen

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)dt,\ n \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}$$

sind wichtige spezielle Funktionen aus der Physik und den Ingenieurwissenschaften. Wir stellen für diese eine Differentialgleichung auf. Sei $y(x) := J_n(x)$. Dann folgt nach (3)(b)

$$y'(x) = -\int_0^\pi \sin(x\sin t - nt)\sin t\,dt, \quad y''(x) = -\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t dt.$$

Mit Hilfe partieller Integration für $u(t) := \sin(x\sin t - nt)$ und $v'(t) := \sin t$ folgt weiter $y'(x) = -\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)(x\cos t - n)\cos t\,dt$. Diese Formeln fügt man zusammen. Man erhält $x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)(-x^2\sin^2 t - x^2\cos^2 t + nx\cos t + x^2 - n^2)dt = n\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)(x\cos t - n)dt = n\int_0^\pi \frac{d}{dt}\sin(x\sin t - nt)dt = n(\sin(-n\pi) - \sin 0) = 0$.
Zusammengefasst gilt die ***Bessel Differentialgleichung***

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0}$$

J_n *ist eine Lösung dieser Differentialgleichung zum Anfangswert* $J_n(0) = 0$.

(5) Leibniz Regel für parameterabhängige Grenzen. *Es seien die Voraussetzungen wie in* (3) *gegeben und* $g,h :]a,b[\to]c,d[$ *seien stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_1 f(x,y)dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x) \quad \forall x \in]a,b[.$$

Beweis. $F :=]a,b[\times]c,d[\times]c,d[\to \mathbb{R},\ F(x,u,v) := \int_u^v f(x,y)dy$ ist stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ $\frac{d}{dx}F(x,g(x),h(x)) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \partial_1 F(x,g(x),h(x)) + \partial_2 F(x,g(x),h(x))g'(x) + \partial_3 F(x,g(x),h(x))h'(x)$ $\Longrightarrow$ Behauptung. □

(6) Beispiel. Seien $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und

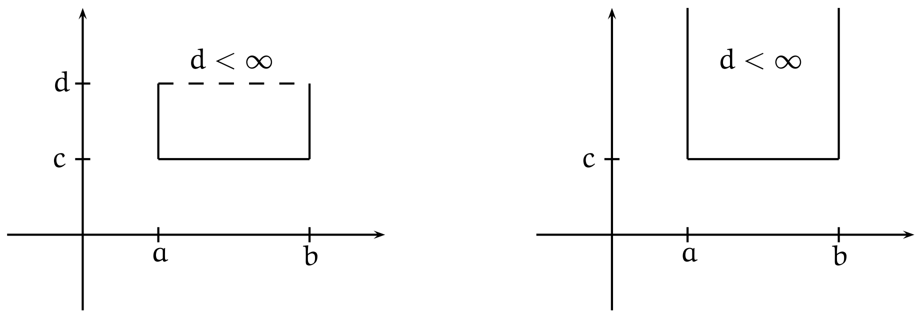
$$x(t) := \frac{1}{\omega} \int_0^t f(u) \sin \omega(t-u) du. \tag{$*$}$$

Dann gilt für die Ableitung nach der Zeit t: $\dot{x}(t) = \frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega(t-t) + \int_0^t f(u) \cos \omega(t-u) du = \int_0^t f(u) \cos \omega(t-u) du$ und $\ddot{x}(t) = f(t) \cos \omega(t-t) - \omega \int_0^t f(u) \sin \omega(t-u) du = f(t) - \omega \int_0^t f(u) \sin \omega(t-u) du$. Daher ist $(*)$ eine Lösung der **Schwingungsgleichung**

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)}$$

zu den Anfangswerten $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

(7) Satz. ***Uneigentliches parameterabhängiges Integral.*** *Seien* $D := [a,b] \times [c,d[\subset \mathbb{R}^2$ *mit* $d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig und partiell nach* $x \in [a,b]$ *differenzierbar.*



Weiter seien $g, h : [c,d[\to \mathbb{R}$, $g \geq 0$, $h \geq 0$ *derart, dass*

(1) *die uneigentlichen Integrale* $\int_c^d g(y) dy < \infty$ *und* $\int_c^d h(y) dy < \infty$ *existieren,*

(2) $|f(x,y)| \leq g(y)$ *und* $|\partial_1 f(x,y)| \leq h(y)$ $\forall (x,y) \in D$.

Dann existieren und sind für jedes $x \in [a,b]$*:*

$$F(x) := \int_c^d f(x,y) dy, \; F'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y) dy.$$

Beweis. Der Beweis ist etwas technisch und wird daher weggelassen. Außerdem werden wir später eine allgemeinere Aussage kennenlernen. $\square$

(8) Beispiel. Die Gammafunktion lautet

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \; x > 0.$$

Das Integral ist uneigentlich an der oberen Grenze und, falls $0 < x < 1$, auch an der unteren. Das Kriterium (7) ist anwendbar und liefert

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n dt, \; n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

$\boxed{\text{Üb}}$ Man beweise $(*)$.

21 Kurvenintegrale

(1) Definition. Kurvenintegral eines skalaren Feldes. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $w : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $w([a, b]) \subset D$. Dann heißt

$$\int_w f\, dl := \int_a^b f(w(t))\|w'(t)\|dt$$

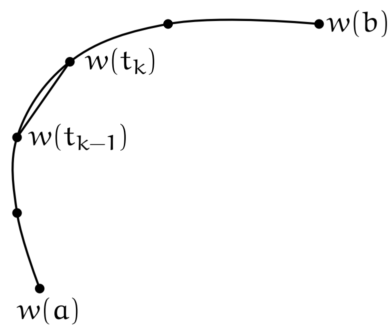
das **Kurvenintegral von f längs w**. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

(2) Lemma. *Seien* $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ *eine* C^1*-Parametertransformation und* $u(s) := w(\varphi(s))$ *eine neue Parametrisierung. Dann ist*

$$\int_u f dl = \int_w f dl.$$

Beweis. Nach (16.8) ist $\int_u f dl = \int_c^d f(u(s))\|u'(s)\|ds = \int_u (f \circ w)(\varphi(s))\|w'(\varphi(s))\varphi'(s)\|\, ds = \int_u (f \circ w)(\varphi(s))\|w'(\varphi(s))\|\, |\varphi'(s)|\, ds$. Nun ist $|\varphi'| = \eta\, \varphi'$ mit $\eta \in \{+1, -1\}$, wobei $\eta = +1$ und $\varphi(c) < \varphi(d)$ falls φ orientierungstreu ist, und $\eta = -1$ und $\varphi(c) > \varphi(d)$ andernfalls, siehe (16.7). Gemäß der Substitutionsregel (9.25) folgt daher $\int_u f dl = \eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(w(t))\|w'(t)\|dt = \int_a^b f(w(t))\|w'(t)\|dt = \int_w f dl$. □

Das Kurvenintegral ist also unabhängig von der C^1-Parametrisierung (auch falls diese nicht orientierungstreu ist). Zur Interpretation des Kurvenintegrals formen wir es näherungsweise zu folgender Summe um:



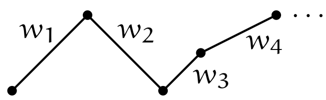
$$\int_w f dl \sim \sum_k f(w(t_k)) \left\| \frac{w(t_k) - w(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\| (t_k - t_{k-1}) = \sum_k f(w(t_k))\|w(t_k) - w(t_{k-1})\|.$$

Jedes Kurvenstückchen zwischen $w(t_{k-1})$ und $w(t_k)$ wird gemäß der Massen- oder Ladungsdichte etc. f mit einer kleinen Masse oder Ladung etc. $f(w(t_k))\|w(t_k) - w(t_{k-1})\|$ belegt. Diese Teilbeträge werden anschließend aufsummiert. Das Ergebnis ist die Gesamtmasse oder Ladung etc., die die Kurve trägt. Es ist klar, dass diese nicht von der Parametrisierung abhängen kann.

Beispiele. • Der Fall der konstanten Belegung (Gleichverteilung) $f = 1$ ergibt als Spezialfall $\sum_k \|w(t_k) - w(t_{k-1})\| = L(w, Z)$ und somit beim Grenzübergang die Länge der Kurve $L(w) = \int_w dl = \int_a^b \|w'(t)\| dt$.

- Gegeben sei die Massendichte $\rho(x, y, z) = x^2y^2 + z^2$ auf der Kurve $w : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $w(t) := (2\cos t, 2\sin t, \frac{1}{2}t)$, welche eine Schraubenfeder beschreibt. Die Masse M der Feder ist $\int_w \rho dl$. Die Rechnung bez. der euklidischen Norm ergibt: $\rho(w(t)) = 16\cos^2 t \sin^2 t + \frac{1}{4}t^2 = 4\sin^2(2t) + \frac{1}{4}t^2 = 2 \cdot (1 - \cos 4t) + \frac{1}{4}t^2$, $w'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, \frac{1}{2})$, $\|w'(t)\|_2 = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} \Longrightarrow M = \sqrt{17}\left(\frac{1}{3}\pi^3 + 2\pi\right)$.

(3) Definition. Ist w stückweise stetig differenzierbar und sind w_i die einzelnen Teile,



dann definiert man

$$\int_w f dl := \sum_i \int_{w_i} f dl.$$

Offenbar ist das Integral unabhängig von der Zerlegung in stetig differenzierbare Teilkurven. Dies ist die **Additivität** des Kurvenintegrals.

Ebenso offensichtlich gilt die **Linearität** des Kurvenintegrals

$$\int_e (f + \alpha g) dl = \int_w f dl + \alpha \int_w g dl.$$

(4) Definition. Kurvenintegral eines Vektorfeldes. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $F : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $w : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $w([a, b]) \subset D$. Dann heißt

$$\int_w F \cdot dx := \int_w \langle F, dx\rangle := \int_w F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n := \int_a^b F(w(t)) \cdot w'(t) dt = \int_a^b \langle F(w(t)), w'(t)\rangle dt$$

das **Kurvenintegral von F längs w**. Dabei bezeichnet "$\cdot$" bzw. $\langle ., .\rangle$ das euklidsche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

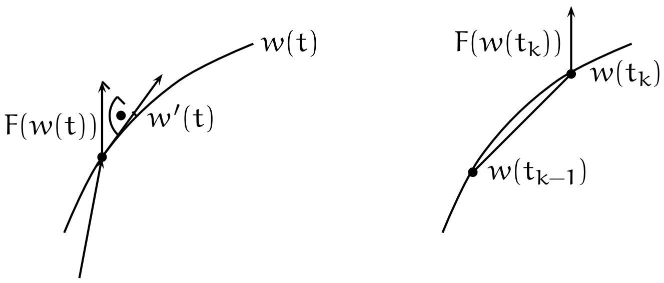
(5) Lemma. *Sei φ eine C^1-Parametertransformation und $u = w \circ \varphi$, siehe* (2). *Dann gilt:*

$$\int_u F \cdot dx = \pm \int_w F \cdot dx,$$

wobei $+$ gilt, falls $\varphi(c) = a$, d.h. φ orientierungstreu ist, und $-$ falls $\varphi(c) = b$, d.h. φ nicht orientierungstreu ist.

Beweis. Nach Definition, (16.8) und der Substitutionsregel (9.25) ist $\int_u F \cdot dx = \int_c^d F(u(s)) \cdot u'(s) ds = \int_c^d (F \circ w)(\varphi(s)) \cdot w'(\varphi(s))\varphi'(s) ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(w(t)) \cdot w'(t) dt$, woraus die Behauptung folgt. □

Das ist die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von einer orientierungstreuen C^1-Parametertransformation. Zur Interpretation des Kurvenintegrals formen wir es näherungsweise zu folgender Summe um:



$\mathsf{F}(w(t)) \cdot \frac{w'(t)}{\|w'(t)\|}$ Komponente von $\mathsf{F}(w(t))$ in Richtung $w'(t)$

$$\int_w \mathsf{F}\cdot dx \sim \sum_k \left\langle \mathsf{F}(w(t_k)), \frac{w(t_k)-w(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\rangle (t_k - t_{k-1}) = \sum_k \langle \mathsf{F}(w(t_k)), w(t_k) - w(t_{k-1})\rangle.$$

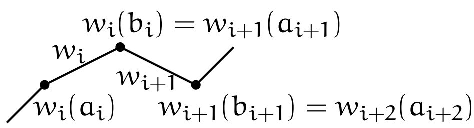
Längs jedes Kurvenstückchens zwischen $w(t_{k-1})$ und $w(t_k)$ greift beispielsweise eine Kraft $\mathsf{F}(w(t_k))$ an und leistet dabei die Arbeit $\langle \mathsf{F}(w(t_k)), w(t_k) - w(t_{k-1})\rangle$. Diese Teilarbeiten werden aufsummiert. Das Ergebnis ist die von dem Kraftfeld F längs des Weges w geleistete Arbeit $A = \int_w \mathsf{F} \cdot dx$.

(6) Bemerkung. Das Kurvenintegral für Vektorfelder ist offenbar **additiv** und **linear**, vgl.(3).

(7) Satz. ***Kurvenintegral eines Gradientenfeldes.*** *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f \in C^1(D)$ *und* $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig differenzierbar mit* $w([a, b]) \subset D$*. Dann gilt:*

$$\int_w \operatorname{grad} f \cdot dx = f(\underbrace{w(b)}_{\textit{Endpunkt}}) - f(\underbrace{w(a)}_{\text{Anfangspunkt}}).$$

Beweis. Wegen der Additivität genügt es, $w \in C^1[a, b]$ zu betrachten. Denn in der Tat ist



$\ldots\ f(w_{i+1}(b_{i+1})) - f(w_{i+1}(a_{i+1})) + f(w_i(b_i)) - f(w_i(a_i)) = \ldots\ f(w_{i+1}(b_{i+1})) - f(w_i(a_i))\ \ldots$ eine Teleskopsumme, bei der sich alle Zwischenterme wegheben. Damit folgt mit der Kettenregel und dem HDI $\int_w \operatorname{grad} f \cdot dx = \int_a^b \langle \operatorname{grad} f(w(t)), w'(t)\rangle dt = \int_a^b (f \circ w)'(t) dt = f \circ w(b) - f \circ w(a)$. $\square$

(8) Korollar. *Sei* F *ein stetiges Gradientenfeld und* w *eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Spur in* D_{F}*. Dann gilt:*

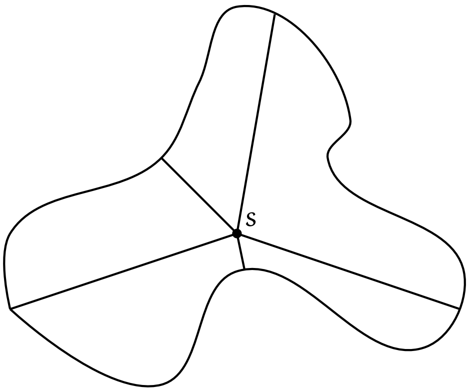
$$\int_w \mathsf{F} \cdot dx = 0.$$

Man schreibt kurz : $\oint \mathsf{F} \cdot dx = 0$.

(9) Lemma und Definition. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $F : D \to \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Gradientenfeld. Dann gilt* $\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \quad \forall x \in D,\ i, j = 1, \ldots, n$, *d.h.* $J_F(x) = J_F(x)^T,\ x \in D$. Man sagt, dass ein differenzierbares Vektorfeld F die **Integrabilitätsbedingung** erfüllt, wenn $J_F(x) = J_F(x)^T,\ x \in D_F$ gilt.

Beweis. Nach Schwarz (17.6) gilt: $F = \text{grad } f \Longrightarrow \partial_i F_j(x) = \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x) = \partial_j F(x)$. □

(10) Definition. Seien V ein Vektorraum, $D \subset V$ und $s \in D$. Dann heißt D **sternförmig** bezüglich s, falls die Verbindungsstrecke $[s; x] \subset D\ \forall x \in D$.



(11) Satz. *Seien* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sternförmig, und* $F : D \to \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Dann ist* F *ein Gradientenfeld.*

Beweis. Für jedes $x \in D$ sei $w_x(t) := s + t(x - s)$, $t \in [0, 1]$, die Verbindungsstrecke von s mit x und $f(x) := \int_0^1 \langle F(w_x(t)), x - s\rangle dt$ das Kurvenintegral von F längs der Verbindungsstrecke. Nach (20.3)(b) darf unter dem Integral differenziert werden

$$\partial_i f(x) = \int_0^1 \partial_i \langle F(w_x(t)), x - s\rangle dt.$$

Es wird jetzt

$$\partial_i \langle F(w_x(t)), x - s\rangle = \frac{d}{dt}\left(t F_i(w_x(t))\right) \tag{$*$}$$

gezeigt, woraus sofort die Behauptung folgt, denn $\partial_i f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t F_i(w_x(t))\right) = 1 \cdot F_i(w_x(t)) - 0 = F_i(x)$, also $F = \text{grad } f$. Beginnend mit der linken Seite von $(*)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\partial_i \langle F(w_x(t)), x - s\rangle &= \partial_i \sum_{j=1}^n F_j(w_x(t))(x_j - s_j) = \sum_j \left[\sum_k \partial_k F_j(w_x(t)) t \delta_{ik}(x_j - s_j) + F_j(w_x(t))\delta_{ij}\right] \\
&= \sum_j t \partial_i F_j(w_x(t))(x_j - s_j) + F_i(w_x(t)) = \sum_j t \partial_j F_i(w_x(t))(x_j - s_j) + F_i(w_x(t)) \\
&= \frac{d}{dt}(t F_i(w_x(t))),
\end{aligned}$$

was die rechte Seite von $(*)$ ist. □

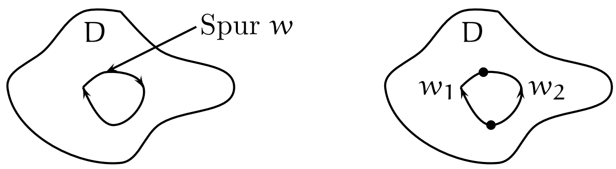
(12) Bemerkung. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F : D \to \mathbb{R}^3$ ist offenbar $\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ genau dann, wenn $\operatorname{rot} F = 0$. Daher folgt aus (9) und (11) für ein stetig differenzierbares Vektorfeld F auf einem offenen und sternförmigen $D \subset \mathbb{R}^3$:

$$F \text{ ist Gradientenfeld} \iff \operatorname{rot} F = 0 \text{ (Integrabilitätsbedingung).}$$

(13) Definition. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und F ein stetiges Vektorfeld auf D. Dann heißt F **konservativ**, falls

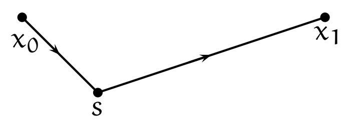
$$\oint F \cdot dx = 0.$$

Letzteres bedeutet, dass $\int_w F \cdot dx = 0$ für alle geschlossenen, stückweise C^1-Kurven w mit Spur in D oder äquivalent, dass die Kurvenintegrale **wegunabhängig** sind, d.h. $\int_{w_1} F \cdot dx = \int_{w_2} F \cdot dx$, sofern w_1 und w_2 in D verlaufen und gleiche Anfangs- und Endpunkte haben.



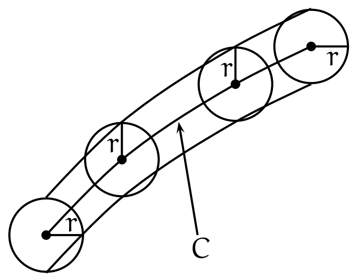
(14) Definition. Ein metrischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu jedem Punktepaar x_0, x_1 in X eine Kurve $w : [0, 1] \to X$ gibt mit $w(0) = x_0$ und $w(1) = x_1$.

Offenbar ist eine sternförmige Teilmenge D eines normierten Raums X ein wegzusammenhängender metrischer Raum.



(15) Lemma. *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und wegzusammenhängend und seien* $x_0, x_1 \in D$. *Dann kann* w *in* (14) *stückweise stetig differenzierbar (genauer als Polygonzug) gewählt werden.*

Beweis. Sei $u : [0, 1] \to D$ stetig mit $u(0) = x_1$ und $u(1) = x_1$. Setze $C := u([0, 1])$. Es existiert $r > 0$ derart, dass $\tilde{U}_r(x) \subset D \quad \forall x \in C$.



Um dies zu zeigen, gehe man vom Gegenteil aus. Für jedes n existiert dann zu $r = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in C$ und ein $y_n \notin D$ mit $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$. Da C kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in C$. Dann gilt auch $y_{n_k} \longrightarrow x$. Nun ist $y_{n_k} \in \mathbb{R}^n \setminus D$ und $x \in D$. Dies ist ein Widerspruch, da $\mathbb{R}^n \setminus D$ abgeschlossen ist.

Da u gleichmäßig stetig ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\left\| u\left(\frac{j}{N}\right) - u\left(\frac{j-1}{N}\right)\right\| < r$ für $j \in \{1, \ldots, N\}$. Der Polygonzug, der $u(0)$, $u\left(\frac{1}{N}\right)$, $u\left(\frac{2}{N}\right)$, …, $u(1)$ nacheinander verbindet, liegt in D. □

(16) Satz. *Sei* F *ein stetiges Vektorfeld auf einem offenen und wegzusammenhängendem* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:*

$$F \textit{ ist konservativ} \iff F \textit{ ist ein Gradientenfeld.}$$

Beweis. Zur Richtung $\Longleftarrow$ siehe (8). Der Wegzusammenhang ist dazu nicht nötig. — Zum Beweis der Richtung $\Longrightarrow$ wähle $s \in D$ fest. Man verbinde jedes $x \in D$ mit s durch eine stückweise C^1-Kurve w (siehe (15)) und setze

$$f(x) := \int_w F \cdot dx.$$

Weil nach Voraussetzung das Integral kurvenunabhängig ist, ist f wohldefiniert. Zu jedem Basisvektor e_i existiert ein $h > 0$ mit

$$w_h(t) := x + te_i \in D, \ 0 \leq t \leq h.$$

Damit ergibt sich $f(x+he_i) \overset{\text{additiv}}{=} \int_w F\cdot dx + \int_{w_h} F\cdot dx = f(x) + \int_{w_h} F\cdot dx = f(x) + \int_0^h F_i(x+te_i)dt$. Die gleiche Formel erhält man auch für $h < 0$. Differenziert man nun nach h an der Stelle $h = 0$, dann folgt $\partial_i f(x) = F_i(x)$. □

(17) Bemerkung. Sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einem offenen $D \subset \mathbb{R}^n$. Betrachte die folgenden möglichen Eigenschaften von F.

(i) F ist ein Gradientenfeld.

(ii) F ist konservativ ($\oint F \cdot dx = 0$, Wegunabhängigkeit).

(iii) $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ (Integrabilitätsbedingung).

Die vorangegangenen Untersuchungen zeigen die folgenden Zusammenhänge.

(α) (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii).

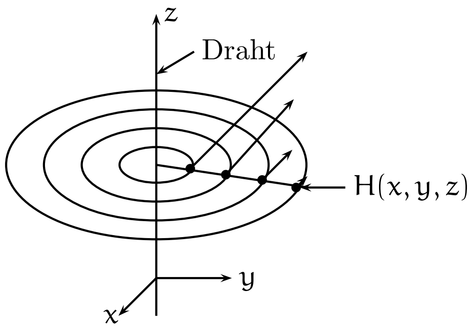
(β) D ist wegzusammenhängend: (ii) $\Longrightarrow$ (i).

(γ) D ist sternförmig: (iii) $\Longrightarrow$ (i).

In (γ) lässt sich sternförmig allgemeiner durch einfach wegzusammenhängend ersetzen: Ein offenes und wegzusammenhängendes $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach wegzusammenhängend**, wenn anschaulich gesprochen jede geschlossene und doppelpunktfreie Kurve in D auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne dabei D zu verlassen. Wir verzichten auf eine strenge mathematische Definition dieses Begriffs.

(18) Beispiel.

(a) Der **Magnetischer Wirbel** $H(x,y,z) := \frac{C}{x^2+y^2}(-y,x,0)$, $C > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$. Ein unendlich langer gerader stromdurchflossener Draht in z-Richtung wird vom magnetischen Feld H umgeben.



Für das Folgende ist die z-Komponente unerheblich. Man betrachtet daher das Vektorfeld in $\mathbb{R}^2$

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x).$$

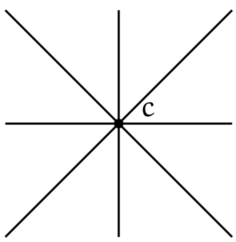
- F erfüllt die Integrabilitätsbedingung $J_F(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 2xy & y^2-x^2 \\ y^2-x^2 & -2xy \end{pmatrix} = J_F(x,y)^T$.
- F ist nicht konservativ, denn für die einmal positiv durchlaufene Einheitskreislinie $w : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $w(t) := (\cos t, \sin t)$ gilt:

$$\int_w F \cdot dx = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t \cos^2 t)dt = 2\pi \neq 0.$$

Entsprechend ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach wegzusammenhängend, insbesondere nicht sternförmig. Ist $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ offen und sternförmig, dann ist $F|_D$ nach (11) ein Gradientenfeld.

$\boxed{\text{Üb}}$ Berechne ein Potenzial von $F|_D$ für $D := \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0] \times \{0\}$.

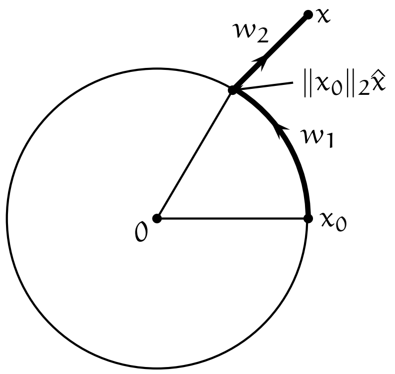
(b) Das allgemeine **Zentralfeld** $F(x) := \varphi(\|x-c\|_2)(x-c)$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{c\}$. Dabei ist $\varphi \in C^2(]0,\infty[)$ und c die Lage des Zentrums.



– $\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige, dass F die Integrabilitätsbedingung erfüllt.

– Offenbar ist $\mathbb{R}^3 \setminus \{c\}$ einfach wegzusammenhängend (allerdings nicht sternförmig).

Daher besitzt F –wie in Anschluß an (17) erwähnt– ein Potenzial U. Im Folgenden sei o.E. $c = 0$. Wir berechnen ein Potenzial U mit Hilfe des Kurvenintegrals. Sei $x_0 \neq 0$ fest. Für jedes $x \neq 0$ bezeichne $\hat{x}$ den auf 1 normierten Vektor $\|x\|_2^{-1}x$. Dann sei w_1 eine C^1-Kurve auf der Oberfläche der Kugel um 0 mit Radius $\|x_0\|_2$, die x_0 mit $\|x_0\|_2\hat{x}$ verbindet (z.B. ein Stück des Großkreises). Weiter sei w_2 die Strecke von $\|x_0\|_2\hat{x}$ nach x. Der aus w_1 und w_2 bestehende Gesamtweg w verbindet x_0 mit x.



Für $\xi(t) := \|w_2(t)\|_2$ gilt $\xi(t)\xi'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\xi(t)^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_2(t) \cdot w_2(t)) = w_2(t) \cdot w_2'(t)$. Weil $F(w_1(t))$ parallel zu $w_1(t)$ ist und $w_1'(t)$ senkrecht dazu steht, ist $F(w_1(t)) \cdot w_1'(t) = 0$. Daher ist $\int_{w_1} F \cdot dx = 0$ und $\int_w F \cdot dx = \int_{w_2} F \cdot dx$. Somit erhält man mit der Substitutionsregel

$$\int_w F \cdot dx = \int_0^1 F(w_2(t)) \cdot w_2'(t)dt = \int_0^1 \varphi(\xi(t))\, \xi(t)\xi'(t)\, dt \;= \int_{\|x_0\|_2}^{\|x\|_2} \xi\varphi(\xi)d\xi.$$

Dies gilt natürlich auch für den nicht gezeichneten Fall $\|x\|_2 < \|x_0\|_2$. Das Ergebnis lautet

$$\boxed{U(x) = -\int_{\|x_0\|_2}^{\|x\|_2} \xi\varphi(\xi)d\xi}$$

Speziell für das Coulomb Potenzial oder das Newton Potenzial $\varphi(\xi) = \frac{\alpha}{\xi^3}$ (siehe das Beispiel nach (17.12)) erhält man

$$U(x) = -\int_{\|x_0\|_2}^{\|x\|_2} \xi\frac{\alpha}{\xi^3}d\xi = \frac{\alpha}{\|x\|_2} - \underbrace{\frac{\alpha}{\|x_0\|}}_{\text{Konstante}}\ .$$

22 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Im Folgenden sei I ein allgemeines Intervall. Das bedeutet, dass das Intervall I nicht einpunktig ist und weder offen oder abgeschlossen noch beschränkt zu sein braucht.

(1) Definition. Seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ und $f : D \to \mathbb{K}$. Dann heißt

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \tag{$*$}$$

explizite gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung. Eine Lösung von $(*)$ ist auf dem Intervall I definierte n-mal differenzierbare Funktion

$$x : I \to \mathbb{K} \tag{$**$}$$

derart, dass für $t \in I$ gilt $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in D$ und $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$.

Ist $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ vorgegeben, dann löst x aus $(**)$ die zugehörige **Anfangswertaufgabe** (AWA), falls

$$t_0 \in I,\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \tag{$***$}$$

In Hinblick auf die folgenden theoretischen Untersuchungen ist es bequem, $(*)$ in ein äquivalentes System erster Ordnung umzuschreiben. Mit $y_1 := x,\ y_2 := x', \dots, y_n := x^{(n-1)},\ y_0 := (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ folgt

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}$$

oder kurz

$$y' = F(t, y), \text{ wobei } \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y' := \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Die AWA lautet $y' = F(t, y)$ mit $y(t_0) = y_0$. Das führt zu der folgenden allgemeinen Definition. (Wir schreiben wieder f statt F.)

(2) Definition. Seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \tag{$*$}$$

ein **explizites System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung**. Eine Lösung von $(*)$ ist eine auf einem Intervall I definierte differenzierbare Funktion

$$y : I \to \mathbb{K}^n \tag{$**$}$$

derart, dass für alle $t \in I$ gilt $(t, y(t)) \in D$ und $y'(t) = f(t, y(t))$. Ist $(t_0, y_0) \in D$ vorgegeben, dann löst y aus $(**)$ die zugehörige AWA, falls zusätzlich

$$t_0 \in I, \quad y(t_0) = y_0. \tag{$***$}$$

(3) Beispiele zur AWA.

(a) Hängt f nicht von y ab, d.h. $y' = f(t)$, und ist f stetig auf einem Intervall, dann löst

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

die AWA eindeutig.

(b) *Sei* $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(\eta) := -1$ *für* $\eta > 0$ *und* $f(0) := 1$. *Dann hat die AWA* $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ *keine Lösung.*

Beweis. Angenommen y löst die AWA auf einem Intervall I mit $0 \in I$. Gemäss dem MWS ist $y'(\tau) = \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \frac{y(t)}{t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} y'(0) = f(y(0)) = f(0) = 1$ und somit $y'(\tau) > 0$ für alle $\tau > 0$ hinreichend klein. Weil deshalb $y'(\tau) = f(y(\tau)) > 0$, folgt $y(\tau) = 0$ für alle τ hinreichend klein. Damit ist aber $y'(\tau) = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

(c) Die AWA $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ hat mehrere Lösungen, z.B. die Nullfunktion $y = 0$ oder die Funktion $y(t) := \frac{1}{4}t^2$ für $t > 0$ und $y(t) := 0$ für $t \leq 0$.

Einige einfache Voraussetzungen an f werden die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der AWA garantieren.

(4) Lemma. *Seien* $k \in \mathbb{N}_0$, D *offen,* $f \in C^k(D, \mathbb{K}^n)$ *und* y *eine Lösung von* $(2)(*)$. *Dann ist* $y \in C^{k+1}(I, \mathbb{K}^n)$.

Beweis. Sei $k = 0$, d.h. f stetig. Dann ist y' stetig wegen $y'(t) = f(t, y(t))$. Also ist y stetig differenzierbar. Ist f stetig differenzierbar, dann ist $t \mapsto f(t, y(t))$ stetig differenzierbar nach der Kettenregel. Also ist y' stetig differenzierbar, d.h. y ist zweimal stetig differenzierbar, usw. □

Drei einfache Typen von Differtialgleichungen erster Ordnung.

Ehe wir uns der allgemeinen Theorie zuwenden, betrachten wir drei spezielle Situationen, die sich weitgehend explizit behandeln lassen.

(5) Trennbare Differentialgleichungen. Seien D_h,$D_g \subset \mathbb{R}$ offen und $h : D_h \to \mathbb{K}$, $g : D_g \to \mathbb{K}$ stetig. Die Differentialgleichung lautet

$$y' = h(t)g(y).$$

Zu lösen ist die zugehörige AWA $y(t_0) = y_0$ zu vorgegebenen $t_0 \in D_h$ und $y_0 \in D_g$. Zur Lösung sind zwei prinzipiell verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Fall 1 $g(y_0) = 0$. Dann ist die konstante Funktion $y = y_0$ eine Lösung der AWA für alle $t \in D_h$.

Fall 2 $g(y_0) \neq 0$. Dann liegt y_0 in der offenen Menge $\{y \in D_g : g(y) \neq 0\}$ und die Variablen können in einer Umgebung von y_0 **getrennt** werden, womit $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t)$ gemeint ist. Man beachte auch, dass es üblich ist, je nach Zusammenhang mit y eine Funktion von t oder eine unabhängige reelle Variable zu bezeichnen.

Durch Integration erhält man die Stammfunktion $K(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\eta)} d\eta$ von $\frac{1}{g}$ mit $K(y_0) = 0$ und die Stammfunktion $H(t) := \int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau$ von h mit $H(t_0) = 0$. Dafür gelten $\frac{d}{dt}K(y(t)) = K'(y(t))y'(t) = \frac{y(t)}{g(y(t))} = h(t)$, $\frac{d}{dt}H(t) = h(t)$ und $K(y(t_0)) = K(y_0) = 0$, $H(t_0) = 0$. Daher ist

$$K(y(t)) = H(t) \qquad (*)$$

eine implizite Lösung der AWA im Fall 2. Da $K'(y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$, läßt sich $(*)$ (zumindest im Prinzip) nach $y(t)$ auflösen. Bezeichnet J die lokale Inverse von K, d.h. $J(K(y)) = y$ in einer Umgebung in D_g von y_0, dann folgt

$$y(t) = J(H(t))$$

für t in einer Umgebung in D_h von t_0.

(6) Beispiele. (a) **Die Logistische Differentialgleichung**

$$y' = (a - by)y, \ a, b > 0.$$

Hier sind D_h, $D_g = \mathbb{R}$ mit $h = 1$ konstant und $g(y) = (a - by)y$. Die Nullstellen von g sind 0 und $\frac{a}{b}$. Zur Lösung der zugehörigen AWA mit $y(t_0) = y_0$ gehen wir wie in (5) vor.

Fall 1 $g(y_0) = 0$. Dann ist $y_0 \in \{0, \frac{a}{b}\}$ und die konstante Funktion $y = y_0$ löst die AWA.

Fall 2 $g(y_0) \neq 0$, d.h. $y_0 \notin \{0, \frac{a}{b}\}$. Die Trennung der Variablen ergibt $\frac{y'}{y(a-by)} = 1$. Mit Hilfe der PBZ $\frac{1}{y(a-by)} = \frac{\frac{1}{a}}{y} + \frac{\frac{b}{a}}{a-by}$ folgt $K(y) = \int \frac{dy}{y(a-by)} = \frac{1}{a} \ln \left|\frac{y}{a-by}\right| +$ Konstante. Weiter ist $H(t) = \int 1 dt = t+$ Konstante. Damit ist $K(y(t)) = H(t)$, d.h. $\frac{1}{a} \ln \left|\frac{y(t)}{a-by(t)}\right| = t+$ Konstante. Für t aus einer Umgebung von t_0 ist aus Stetigkeitsgründen $y(t) \notin \{0, \frac{a}{b}\}$, weil $y(t_0) \notin \{0, \frac{a}{b}\}$. Somit hat $\frac{y(t)}{a-by(t)}$ für diese t einheitliches Vorzeichen. Es folgt $\frac{y(t)}{a-by(t)} = k'e^{at}$ mit einer Konstanten $k' \neq 0$ und schließlich

$$y(t) = \frac{a}{b + ke^{-at}} \quad \text{mit } k := \left(\frac{a}{y_0} - b\right) e^{at_0} \text{ für alle } t \in I_0. \tag{$*$}$$

Dabei ist I_0 das **maximale Definitionsintervall**, welches von den Anfangswerten abhängt. Falls $k > 0$ ist, d.h. $0 < y_0 < \frac{a}{b}$, ist $I_0 = \mathbb{R}$. Falls $k = 0$ ist, d.h. $y_0 = \frac{a}{b}$, liegt die konstante Lösung $y = \frac{a}{b}$ vor, welche bereits im Fall 1 auftritt. Falls $k < 0$, d.h. $y_0 < 0$ oder $y_0 > \frac{a}{b}$ ist, hat der Nenner eine Nullstelle bei $t = t_c := \frac{1}{a} \ln \frac{-k}{b}$. Deshalb ist das maximale Lösungsintervall entweder gleich $]-\infty, t_c[$ oder gleich $]t_c, \infty[$. Welcher der beiden Fälle vorliegt, hängt davon ab, ob $t_0 \in]-\infty, t_c[$ oder $t_0 \in]t_c, \infty[$. Falls $y_0 < 0$ ist $t_c = t_0 + \frac{1}{a} \ln(1 + \frac{a}{|y_0|b}) > t_0$ und somit $I_0 =]-\infty, t_c[$. Falls $y_0 > \frac{a}{b}$ ist $t_c = t_0 + \frac{1}{a} \ln(1 - \frac{a}{y_0 b}) < t_0$ und somit $I_0 =]t_c, \infty[$. Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}
(t_0, y_0) &\in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[&&\Rightarrow \; I_0 =]-\infty, t_c[,\\
(t_0, y_0) &\in \mathbb{R} \times [0, \frac{a}{b}] &&\Rightarrow \; I_0 = \mathbb{R},\\
(t_0, y_0) &\in \mathbb{R} \times]\frac{a}{b}, \infty[&&\Rightarrow \; I_0 =]t_c, \infty[,
\end{aligned}$$

wobei im Fall $y_0 \notin \{0, \frac{a}{b}\}$ die Lösung y durch $(*)$ gegeben ist.

(b) Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1 - y^2}{t}$$

ist trennbar mit $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$ und $h(t) = \frac{1}{t}$, $g(y) = 1 - y^2$. Die Nullstellen von g sind 1 und -1.

Fall 1 $g(y_0) = 0$. Dann ist $y_0 \in \{-1, 1\}$ und die konstante Funktion $y = y_0$ löst die AWA.

Fall 2 $g(y_0) \neq 0$, d.h. $y_0 \notin \{-1, 1\}$. Die Trennung der Variablen ergibt $\frac{y'(t)}{1-y(t)^2} = \frac{1}{t}$. Damit sind $K(y) = \int \frac{1}{1-y^2} dy = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+y}{1-y}\right| +$ Konstante und $H(t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| +$ Konstante. Gleichsetzen liefert $\ln \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln t^2 +$ Konstante. Wie im vorangegangenen Beispiel folgt $\frac{1+y}{1-y} = kt^2$ mit einer Konstanten $k \neq 0$ und schließlich

$$y(t) = \frac{kt^2 - 1}{kt^2 + 1} \quad \text{mit } k = \frac{1 + y_0}{1 - y_0} t_0^{-2} \text{ für alle } t \in I_0. \tag{$*$}$$

Dabei ist I_0 das maximale Definitionsintervall, welches von den Anfangswerten abhängt:

$$\begin{aligned}
y_0 &\in]-1, 1[, \; t_0 > 0 &&\Rightarrow \; I_0 =]0, \infty[,\\
y_0 &\in]-1, 1[, \; t_0 < 0 &&\Rightarrow \; I_0 =]-\infty, 0[,\\
y_0 &\notin]-1, 1[, \; t_0 > 0 &&\Rightarrow \; I_0 = \left] t_0 \sqrt{\frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}}, \infty \right[,\\
y_0 &\notin]-1, 1[, \; t_0 < 0 &&\Rightarrow \; I_0 = \left] -\infty, t_0 \sqrt{\frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}} \right[.
\end{aligned}$$

Zur Begründung überlegt man sich, dass I_0 durch die folgenden Bedingungen bestimmt wird.

(α) $t_0 \in I_0 \subset D_h =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

Demnach ist $I_0 \subset]0, \infty[$, falls $t_0 > 0$ und $I_0 \subset]-\infty, 0[$, falls $t_0 < 0$.

(β) $kt^2 + 1 \neq 0 \ \forall t \in I_0$.

Für $|y_0| < 1$ ist $k > 0$ und es folgt keine Einschränkung aus (β). Für $|y_0| > 1$ ist $k < 0$, weshalb $t \in I_0$ die Bedingung $t^2 \neq -\frac{1}{k} = t_0^2 \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1} > 0$ erfüllen muss.

(7) Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Seien $D_a, D_b \subset \mathbb{R}$ offen, a, b stetig und $t_0 \in D_a \cap D_b$. Mit $y_0 \in \mathbb{K}$ lautet die AWA

$$y' + a(t)y = b(t), \ y(t_0) = y_0.$$

Dabei heißt a die **Koeffizientenfunktion** und b die Störfunktion oder der **inhomogene Anteil**. Man löst zunächst die **homogene** Gleichung $y' + a(t)y = 0$ durch Trennung der Variablen und erhält

$$y_h(t) = y_0 \, e^{-A(t)},$$

wobei $A(t) := \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau$ die Stammfunktion von a mit $A(t_0) = 0$ ist. Mit der Methode der Variation der Konstanten findet man dann schließlich die Lösung der AWA

$$y(t) = y_h(t) + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s) ds.$$

$\boxed{\text{Üb}}$ Man verifiziere, dass y eine Lösung der AWA ist.

(8) Homogene Differentialgleichungen. Sei k stetig auf der offenen Menge $D_k \subset \mathbb{R}$ und

$$y' = k\left(\frac{y}{t}\right), \ t \neq 0.$$

Die Substitution $v(t) := \frac{y(t)}{t}$ liefert: $y(t) = tv(t) \Longrightarrow y'(t) = v(t) + tv'(t) \Longrightarrow$

$$v' = \frac{1}{t}(k(v) - v).$$

Diese Differentialgleichung ist trennbar.

$\boxed{\text{Üb}}$ Löse die AWA $y' = \frac{y^2 + t^2}{ty}$, $y(1) = 1$ und bestimme das maximale Definitionsintervall.