Analysis 1 für Physiker *

Domenico P.L. Castrigiano †

6. Juli 2010

*Vorlesungsskript WS 2009/10
†Zentrum Mathematik TU München

Inhaltsverzeichnis

1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ werden hier als bekannt vorausgesetzt. Ihre Begründung erfolgt mittels der Peano-Axiome. Im Wesentlichen besagen sie, dass die natürlichen Zahlen der Größe nach angeordnet sind, d.h. $1 < 2 < 3 < \ldots$, und dass auf diese Weise die Menge $\mathbb{N}$ durchlaufen wird, von einer natürlichen Zahl n zur nächsten $n + 1$, ohne Wiederkehr.

(1) Beweisprinzip der vollständige Induktion. Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Alle Aussagen $A(n),\ n \in \mathbb{N}$, sind richtig, wenn

(IA) $A(1)$ richtig ist und, wenn

(IV) für jedes $n \in \mathbb{N}$, wofür $A(1),\ A(2), \ldots, A(n)$ gelten,

(IS) auch $A(n + 1)$ richtig ist.

Dabei stehen IA für Induktionsanfang, IV für Induktionsvoraussetzung und IS für Induktionsschluss.

(2) Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die **arithmetische Summenformel**

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Die Aussage $A(n)$ ist die Gültigkeit der Formel, z.B. $A(3) :\ \underbrace{1 + 2 + 3}_{=6} \overset{!}{=} \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3 + 1)}_{=6}.$

Beweis durch vollständige Induktion.

(IA) Überprüfe $A(1)$: Linke Seite $= 1$, rechte Seite $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 1$. Also stimmt $A(1)$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $A(i)$ für $i = 1, \ldots, n$ richtig ist.

(IS) Zeige, dass dann auch $A(n + 1)$ richtig ist. In der Tat:

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + n} + (n + 1) \overset{(IV)}{=} \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2).$$

Das ist $A(n + 1)$. $\square$

(3) Beispiel. Für jede Zahl $x \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die **geometrische Summenformel** (wichtig!)

$$\underbrace{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}_{\text{endliche geometrische Reihe}} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beweis durch vollständige Induktion.

(IA) Überprüfe $n = 1$: Linke Seite $= 1 + x$, rechte Seite $= \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x$.

(IS) Schluss von n auf $n + 1$:

$$\underbrace{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}\, + x^{n+1} \overset{(IV)}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} =$$
$$= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

Also gilt in der Tat die Formel für $n + 1$. □

(4) Beispiel. Für jede Zahl $x \geq -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die **Bernoulli-Ungleichung**

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis durch vollständige Induktion.

(IA) Überprüfe $n = 1$: Linke Seite $= (1 + x)^1 = 1 + x$, rechte Seite $= 1 + 1 \cdot x = 1 + x$.

(IS) Schluss von n auf $n+1$: Nach IV ist $(1+x)^n \geq 1+nx$ und nach Voraussetzung ist $1+x \geq 0$, weshalb

$$(1 + x)^{n+1} = \underbrace{(1 + x)^n}_{\geq 1+nx} \underbrace{(1 + x)}_{\geq 0} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq$$
$$\geq 1 + x + nx = 1 + (n + 1)x.$$

Also gilt die Formel für $n + 1$. □

Bemerkung. Die Induktion kann allgemeiner bei irgendeiner ganzen Zahl n_0 beginnen. Offenbar erhält man dann ggf. die Gültigkeit der Aussagen für $n \geq n_0$.

(5) Konstruktion durch vollständige Induktion bzw. Rekursive Definition. Jeder natürlichen Zahl n wird ein Element $f(n)$ einer Menge X zugeordnet durch

(I) die Angabe von $f(1)$ und

(II) eine Vorschrift, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Element $f(n+1)$ aus den Elementen $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ zu bestimmen gestattet.

(6) Beispiel. Die **Potenzen** x^n einer Zahl x sind rekursiv definiert durch

(I) $x^0 := 1$

(II) Rekursionsformel: $x^{n+1} := x^n \cdot x$ für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Bemerkung. $b := a$ bedeutet, dass die linke Seite b durch die rechte Seite a definiert wird .

(7) Summen- und Produktzeichen. Seien $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, allgemeiner n, m ganzzahlig, $n > m$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ Zahlen. Folgende Schreibweisen werden verwendet:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Beispiele.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1) \quad \text{(siehe (2))},$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 \ldots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{für } x \neq 1 \\ n+1 & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad \text{(siehe (3))}.$$

Der Name des Summationsindex ist unerheblich. Also ist z.B.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i.$$

Für $m \leq l < n$ gilt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k.$$

Das **Indexschieben** ist eine oft benutzte Umindizierung: Für $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p},$$

weil die rechte Seite gleich $a_{m+p-p} + a_{m+p+1-p} + \ldots + a_{n+p-p} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ ist.

Fakultät und Binomialkoeffizienten

(8) Fakultät. Die **Fakultät** $n!$ ist für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ rekursiv definiert durch

(I) $0! := 1$

(II) $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$.

Man erkennt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Für $n!$ gibt es keine einfache Berechnungsformel wie etwa für $1+2+\ldots+n$. Die Fakultät wächst sehr rasch. Z.B. ist $1000! > 4 \cdot 10^{2568}$. Siehe hierzu die **Stirlingsche Formel** zur näherungsweisen Berechnung von $n!$ für große n.

(9) Satz. *Die Anzahl aller Anordnungen n verschiedener Elemente ist gleich $n!$.*

Beweis. Die Elemente seien $1, 2, \ldots, n$ genannt. Für $n = 1$ gibt es nur eine Anordnung, nämlich (1). Für $n = 2$ gibt es die beiden Anordnungen $(1, 2)$ und $(2, 1)$. Für $n = 3$ gibt es sechs Anordnungen: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ und $(3, 2, 1)$. Damit ist die Behauptung für $n = 1, 2, 3$ verifiziert. Es folgt nun der Beweis durch vollständige Induktion.

(IA) Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Siehe oben.

(IS) Nach (IV) gibt es $n!$ Anordnungen von $1, 2, \ldots, n+1$, wofür 1 an der ersten Stelle steht. Ebensoviele gibt es, wofür 1 an der zweiten Stelle steht, usw. Insgesamt gibt es also $(n+1)n! = (n+1)!$ Anordnungen .

$\square$

(10) Definition. Eine **Permutation** einer Menge M ist eine eineindeutige Zuordnung der Elemente von M auf sich.

Im Fall $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ entspricht jeder Permutation π genau eine Anordnung $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ und umgekehrt. Also folgt

(11) Korollar. *Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.*

(12) Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann bezeichne $\binom{n}{k}$ ("n über k") die Anzahl der verschiedenen k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen **Binomialkoeffizienten**.

Im Fall $k = 1$ ist die Anzahl der einelementigen Teilmengen offenbar n, also $\binom{n}{1} = n$. Weiter gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,weil die Komplementmenge einer k-elementigen Teilmenge $n-k$ Elemente hat. Die leere Menge $\emptyset$ ist die einzige Menge mit 0 Elementen. Man setzt daher $\binom{n}{0} := 1$. Weil $\emptyset \subset \emptyset$ ist, setzt man auch $\binom{0}{0} := 1$.

(13) Satz. *Es gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad \textit{für } 0 \leq k \leq n.$$

Beweis. Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n elementige Menge. Nach (9) gibt es $n!$ Anordnungen ihrer Elemente. Die ersten k Elemente einer Anordnung ergeben eine k-elementige Teilmenge. Jede k-elementige Teilmenge kommt dabei

$$k!(n-k)!$$

mal oft vor wegen der $k!$ bzw. $(n-k)!$ möglichen Permutationen der ersten k bzw. letzten $n-k$ Elemente (erneut nach (9)). □

(14) Beispiel. Beim Lotto 6 aus 49 gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$$

verschiedene Möglichkeiten des Ankreuzens.

(15) Satz. *Es gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise (15).

Bemerkung. Offenbar ist (15) eine Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten. Man baut damit das **Pascalsche Dreieck** auf:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Die Zeilen werden durch n=0,1,2,... und die Diagonalen durch $k = 0, 1, 2, \ldots$ indiziert. So ist z.B. $\binom{5}{3} = 10$.

(16) Binomische Formel. *Seien a, b Zahlen und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a^n = \\
&= b^n + nab^{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) a^2 b^{n-2} + \ldots + a^n.
\end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion oder aufgrund folgender Überlegung. Da

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ Faktoren}},$$

kommt nach (12) bei der Bildung alle möglichen Produkte die Potenz a^k genau $\binom{n}{k}$ mal oft vor, gleichzeitig entsteht dabei b^{n-k}. $\square$

(17) Beispiele.

(a) $(a+b)^5 = b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5$.

(b) $(1+x)^n = \underbrace{1 + nx}_{\text{vgl. Bernoulli Ungleichung}} + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^n$.

(c) $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Daher ist nach (12) und (16) die Anzahl aller Teilmengen einer n-elementigen Menge gleich 2^n.

2 Reelle Zahlen und Abzählbarkeit

Zahlenmengen

(a) $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ die Menge der **ganzen Zahlen**.

(c) $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der **rationalen Zahlen**.

In $\mathbb{Z}$ kann man stets subtrahieren, d.h. $n, m \in \mathbb{Z} \Longrightarrow m - n \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet, dass die Gleichung $x + n = m$ in $\mathbb{Z}$ stets eine Lösung hat. Das gilt nicht in $\mathbb{N}$! — In $\mathbb{Q}$ kann man stets dividieren, d.h. $r, s \in \mathbb{Q}, s \neq 0 \Longrightarrow \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Das bedeutet, dass die Gleichung $xs = r$ mit $s \neq 0$ in $\mathbb{Q}$ stets eine Lösung hat. Das gilt nicht in $\mathbb{Z}$!

(d) Die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen** gewinnt man aus $\mathbb{Q}$ durch "Vervollständigung".

Wir werden bez. der Vollständigkeit drei äquivalente Eigenschaften untersuchen, geben jedoch keine Konstruktion von $\mathbb{R}$ an, sondern beschreiben lediglich die Struktur von $\mathbb{R}$.

Bemerkung. Im Folgenden werden wir die Pfeile $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ und $\Leftrightarrow$ verwenden. Seien A und B Aussagen. Dann bedeutet $A \Rightarrow B$, dass B gilt, wenn A gilt. Gilt zusätzlich auch die umgekehrte Implikation $A \Leftarrow B$, dann schreibt man $A \Leftrightarrow B$ und nennt A und B **äquivalent**.

Der Körper $\mathbb{R}$

Es gelten die folgende Regeln für Addition und Multiplikation.

(K1) $a + b = b + a$, $ab = ba$ — Kommutativität von Addition und Multiplikation.

(K2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$ — Assoziativität von Addition und Multiplikation.

(K3) Die Gleichungen $x + a = b$ und $xc = b$ falls $c \neq 0$ sind lösbar.

(K4) $a(b + c) = ab + ac$ — Distributivgesetz bez. Addition und Multiplikation.

Die Regeln der vier Grundrechnungsarten folgen aus (K1)–(K4). Beispielsweise gilt $-0 = 0$ und

$$ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Die Regeln (K1)-(K4) heißen **Körperaxiome**. Sie gelten in $\mathbb{R}$. Daher ist $\mathbb{R}$ ein **Körper**. (K1)–(K4) gelten auch innerhalb $\mathbb{Q}$. Damit ist $\mathbb{Q}$ selbst ein Körper, ein **Unterkörper** von $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist die Menge der **irrationalen Zahlen**. Sie ist kein Unterkörper von $\mathbb{R}$.

Anordnung in $\mathbb{R}$

$a > 0$ heißt "a ist positiv" oder "a ist größer als Null".

Anordnungsaxiome

(A1) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt eine der Relationen, entweder $\quad a > 0 \quad$ oder $\quad a = 0 \quad$ oder $\quad a < 0$.

(A2) Für jedes $a > 0,\ b > 0$ gelten $\quad a + b > 0 \quad$ und $\quad ab > 0$.

(A3) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $\quad n - a > 0$ **(Archimedisches Axiom)**.

Ist $-a$ positiv, dann heißt a negativ. Man verwendet folgende Bezeichnungen und Sprechweisen. $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ positiv}\}$ und $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ negativ}\}$ steht für die Menge der positiven bzw. negativen reellen Zahlen. Für $a, b \in \mathbb{R}$ bedeutet $a > b$, in Worten "a größer b", dass $b - a > 0$. Weiter bedeutet $b < a$ "b kleiner a", dass $a > b$, und $a \leq b$ "a kleiner gleich b", dass $a < b$ oder $a = b$. Schließlich nennt man "a nicht negativ", wenn $a \geq 0$.

Alle Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen folgen aus (A1)-(A3). Insbesondere gelten für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen.

- Es trifft stets genau eine der drei Relationen $\quad a > b, \quad a = b, \quad a < b \quad$ zu.
- Es gilt die Transitivität: $\quad a > b,\ b > c \Longrightarrow a > c$.
- Sei $a > b$. Dann gelten:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \ \text{ falls } b > 0\\ &a + c < b + c \ \text{ für jedes } c,\\ &ac > bc \ \text{ falls } c > 0 \quad \text{und} \quad ac < bc \ \text{ falls } c < 0. \text{ (!)}\end{aligned}$$

- Seien $a > b$ und $c > d$. Dann gilt

$$a + c > b + d \text{ stets} \quad \text{und} \quad ac > bd \ \text{ falls } \ b > 0, d > 0.$$

- Für jedes $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.
- Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist positiv.

(1) Satz. *Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $r > 1 \Longrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : r^n > K$.

(b) $0 < r < 1 \Longrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : r^n < \epsilon$.

Bemerkung. (a) ist interessant für große K und r nahe bei 1. Z.B. gilt also: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $\left(1 + \frac{1}{1.000.000}\right)^n > 10.000.000$. Wie groß muß n sein? — (b) ist interessant für kleine ϵ und r nahe bei 1. Z.B. gilt also: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $\left(1 - \frac{1}{1.000.000}\right)^n < \frac{1}{10.000.000}$. Wie groß muß n sein?

Beweis.

(a) $r = 1 + x$ mit $x := r - 1 > 0 \overset{\text{Bernoulli Ungleichung}}{\Longrightarrow} r^m \geq 1 + mx \;\; \forall m \in \mathbb{N}$. (A3) $\Longrightarrow \; \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{K}{x} \Longrightarrow nx > K$. Damit ist $r^n > K$ für dieses n.

(b) Wende (a) auf $r' := \frac{1}{r} > 1$ und $K := \frac{1}{\epsilon}$ an. Danach $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{r}\right)^n = (r')^n > K = \frac{1}{\epsilon} \Longrightarrow \epsilon > r^n$. $\square$

(2) Definition. Der **Absolutbetrag** $|a|$ einer reellen Zahl a ist definitionsgemäß

$$|a| := \begin{cases} \;\;\, a & \text{falls } a \geq 0, \\ - \, a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

(3) Satz. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $a \leq |a|$,

(ii) $|ab| = |a||b|$,

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ ***Dreiecksungleichung,***

(iv) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

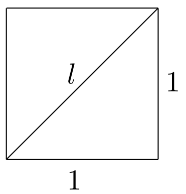
Beweis. (i), (ii) sind offensichtlich.

(iii) $a + b \leq |a| + |b|$ und $(-a) + (-b) \leq |a| + |b|$ wegen (i). $\Longrightarrow$ $(a + b) \leq |a| + |b|$ und $-(a + b) \leq |a| + |b|$, d.h. es gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(iv) $|a| = |a-b+b| \overset{(iii)}{\leq} |a-b|+|b| \Longrightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$. Da a nicht vor b ausgezeichnet ist, dürfen hier a und b vertauscht werden. Es folgt $|b| - |a| \leq |b - a|$. Daher ist $\pm(|a| - |b|) \leq |a - b|$, was die Behauptung ist. $\square$

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Die Länge l der Diagonale eines Einheitsquadrats ist keine rationale Zahl.



Denn angenommen es ist $l = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ ein gekürzter Bruch, d.h. p und q teilerfremd. Dann folgt aus $l^2 = 2$, dass $p^2 = 2q^2$. Deshalb ist p gerade, denn wäre 2 kein Primzahlenfaktor von p, dann auch nicht von p^2. Also ist $p = 2p_1$ mit $p_1 \in \mathbb{N}$. Damit ist $4p_1^2 = 2q^2$, also $2p_1^2 = q^2$, weshalb auch q gerade ist. Das widerspricht jedoch der Annahme, dass p und q teilerfremd sind. — Weil $l \notin \mathbb{Q}$, ist l eine irrationale Zahl. Wie wir sehen werden, gibt es "mehr" irrationale Zahlen als rationale. Jedenfalls ist $\mathbb{Q}$ in diesem Sinn nicht **vollständig**. In $\mathbb{R}$ ist diese Unvollständigkeit beseitigt.

Die **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$ drückt sich durch drei äquivalente Eigenschaften aus:

(I) *Jede Intervallschachtelung hat einen nichtleeren Schnitt.*

(S) *Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.*

(C) *Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Es gelten (I) $\iff$ (S), (I) $\iff$ (C) und (S) $\iff$ (C).

(I) Intervallschachtelung

Bezeichnungen. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ heißt

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \textbf{abgeschlossenes} \\
]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \textbf{offenes} \\
[a,b[&:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \textbf{rechts halboffenes} \\
]a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \textbf{links halboffenes}
\end{aligned}$$

Intervall. Sei I ein solches Intervall. Dann heißen a und b die **Randpunkte** von I und $|I| := b-a$ heißt die **Länge** von I. — Außerdem betrachtet man die

$$\begin{aligned}
[a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{nach oben unbeschränkten} \\
]-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} && \text{nach unten unbeschränkten}
\end{aligned}$$

abeschlossenen Intervalle und entsprechend $]a,\infty[$, $]-\infty,a[$, wobei a jeweils der Randpunkt des Intervalls ist. Für $]0,\infty[$ schreibt man auch $\mathbb{R}_+$. Schließlich setzt man $]-\infty,\infty[:= \mathbb{R}$.

(4) Definition. Eine **Intervallschachtelung** ist eine Folge $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots$, kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, von abgeschlossenen Intervallen I_n mit den Eigenschaften

(I1) $I_{n+1} \subset I_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(I2) $\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \epsilon$.

(D.h. die Intervalle liegen ineinander und ihre Längen werden beliebig klein. Natürlich kann es vorkommen, dass I_{n+1} und I_n einen gemeinsamen Randpunkt haben.)

$\mathbb{R}$ ist vollständig, weil das **Intervallschachtelungsprinzip** gilt:

(I) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Intervallschachtelung* $\Longrightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Bemerkung. Es ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : x \in I_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}\}$, also die Menge all derjenigen reellen Zahlen, die in jedem der Intervalle I_n liegen. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ist der Durchschnitt aller Intervalle.

(5) Satz. *Ist* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Intervallschachtelung, dann ist* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *einpunktig, d.h. es liegt nur* ***eine*** *reelle Zahl in allen Intervallen.*

Beweis. Sind $a, b \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, dann sind $a, b \in I_n$ und somit $|a-b| \le |I_n|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wäre also $a \neq b$, so hätte jedes Intervall I_n mindestens die Länge $|a-b|$, was (I2) widerspricht. □

Beispiel. $I_n := [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}$.

Für das Folgende setze $r^{-n} := \left(\frac{1}{r}\right)^n$ für $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt dann allgemein: $r^{m+l} = r^m r^l \ \ \forall\, m, l \in \mathbb{Z}$.

(6) Definition und Satz. Ein **Dezimalbruch** besteht aus einem Vorzeichen $\eta \in \{+, -\}$ und einer Folge von Zahlen aus $\{0, 1, \ldots, 9\}$, die wie folgt indiziert ist:

$$\eta d_m d_{m-1} \ldots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \ldots,$$

wobei $m \in \mathbb{N}_0$ und $d_m > 0$ falls $m > 0$. *Er stellt eine reelle Zahl mittels folgender Intervallschachtelung dar. Für* $\eta = +$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $I_n := [a_n, b_n]$ *mit*

$$a_n := \underbrace{\sum_{i=0}^{m} d_i\, 10^i}_{\in\mathbb{N}_0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} d_{-j}\, 10^{-j}}_{\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \quad \text{und} \quad b_n := a_n + 10^{-n}.$$

Für $\eta = -$ definiert man (I_n) entsprechend.

Beweis. Sei $\eta = +$. Da $|I_n| = 10^{-n}$, ist (I2) nach (1)(b) erfüllt. Außerdem ist offensichtlich $a_n \le a_{n+1}$. Es gilt $b_{n+1} \le b_n$, denn $b_{n+1} = a_{n+1} + 10^{-n-1} = a_n + d_{-(n+1)} 10^{-n-1} + 10^{-n-1} \le a_n + 10 \cdot 10^{-n-1} = b_n$. Somit gilt auch (I1). — Der Fall $\eta = -$ folgt analog.

□

(7) Satz. k-te Wurzeln. $\forall x \in \mathbb{R}_+\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists_1 y \in \mathbb{R}_+$: $y^k = x$. *Bezeichnung:* $y = x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, weil: $0 < y_1 < y_2 \Longrightarrow y_1^k < y_2^k$. — Zur Existenz genügt es, $x < 1$ anzunehmen. Den Fall $x > 1$ erhält man durch Übergang zu $x' := \frac{1}{x}$. Definiere einen Dezimalbruch rekursiv: Sei $d_0 := 0$ und seien $d_{-1}, \ldots, d_{-n}$ bereits so definiert, dass

(i) $(0, d_{-1} \ldots d_{-n})^k \le x$

(ii) $(0, d_{-1} \ldots d_{-n} + 10^{-n})^k > x$.

Dann sei $d_{-(n+1)} \in \{0, \ldots, 9\}$ maximal derart bestimmt, dass $(0, d_{-1} \ldots d_{-n} d_{-(n+1)})^k \le x$. Damit gilt bereits (i). Ist $d_{-(n+1)} < 9$, dann gilt auch (ii). Es bleibt der Fall $d_{-(n+1)} = 9$. Angenommen (ii) gilt nicht, d.h. es ist $(0, d_{-1} \ldots d_{-n}\, 9\ + 10^{-(n+1)})^k \le x$. Da aber $0, d_{-1} \ldots d_{-n}\, 9\ + 10^{-(n+1)} = 0, d_{-1} \ldots d_{-n} + 10^{-n}$, ist dies ein Widerspruch zu (ii).

Sei nun gemäß (6) $y \in \mathbb{R}$ definiert durch obigen Dezimalbruch über die zugehörige Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$. Dann ist $x \in [a_n^k, b_n^k]$ nach (i) und (ii). Da $y \in [a_n, b_n]$, gilt auch $y^k \in [a_n^k, b_n^k]$. Es folgt $x = y^k$, weil auch $([a_n^k, b_n^k])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist. In der Tat ist (I1) klar. Zu (I2) beachte

$$b^k - a^k = (b-a)\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i b^{k-1-i}\right),$$

was leicht aus der Summenformel zur endlichen geometrischen Reihe folgt. Damit gilt $b_n^k - a_n^k \leq (b_n - a_n)\cdot k$, weil $a_n \leq b_n \leq 1$. Weiter ist $b_n - a_n = 10^{-n}$. Nach (1) existiert zu $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $10^{-n} < \frac{\epsilon}{k}$, weshalb $b_n^k - a_n^k < \epsilon$. $\square$

(S) Supremum

(8) Definition. $M \subset \mathbb{R}$ heißt **nach oben** bzw. **nach unten beschränkt**, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $x \leq s$ bzw. $x \geq s$ für alle $x \in M$ gilt. In diesem Fall heißt s eine **obere** bzw. **untere Schranke** von M. Weiter heißt M **beschränkt**, wenn M nach oben **und** unten beschränkt ist.

Beispiel. $M := [0,1[$ ist beschränkt. $[0,1[$ besitzt jedoch keine größte Zahl, denn ist $x \in [0,1[$, dann gilt

$$0 \leq x < \frac{1}{2}(1+x) < 1,$$

d.h. $\frac{1}{2}(1+x) \in [0,1[$ ist größer als x. Weiter ist 1 eine obere Schranke von $[0,1[$ und $1 \notin [0,1[$. Offenbar ist aber 1 die kleinste obere Schranke von $[0,1[$. Entsprechend ist 0 die kleinste untere Schranke von $[0,1[$. Doch in diesem Fall ist $0 \in [0,1[$.

(9) Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann heißt $s \in \mathbb{R}$ **Supremum** von M, falls s kleinste obere Schranke von M ist, d.h. falls

(i) s obere Schranke von M ist, und

(ii) jedes $s' < s$ keine obere Schranke von M ist.

Offenbar gibt es höchstens ein solches s. Man bezeichnet es mit $\sup M$. — Entsprechend ist das **Infimum** die größte untere Schranke. Sie wird mit $\inf M$ bezeichnet.

(10) Beispiele.

(a) Ist I ein Intervall (abgeschlossen oder offen oder halboffen) mit Randpunkten a und b, $a < b$, dann ist $\sup I = b$ und $\inf I = a$.

(b) $M \subset \mathbb{R}$ hat definitionsgemäß ein **Maximum** m, wenn

$$m \in M \text{ und } m \geq x \ \forall x \in M.$$

Offenbar ist m eindeutig. Es wird mit $\max M$ bezeichnet. Existiert das Maximum, dann existiert und ist $\sup M = \max M$. Entsprechendes gilt für das **Minimum**, bezeichnet mit $\min M$.

(c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nach dem Archimedischen Axiom nicht nach oben beschränkt. $\mathbb{N}$ besitzt also kein Supremum.

(11) Satz. *$\mathbb{R}$ hat die **Supremumseigenschaft** (Infimumseigenschaft): Ist $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben (unten) beschränkt, dann existiert* $\sup M$ *(*$\inf M$*).*

Beweis. Die Aussage wird nur für den ersten Fall bewiesen. Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ also nach oben beschränkt. Definiere rekursiv eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$. Sei b_1 (irgendeine) obere Schranke von M und a_1 keine obere Schranke von M, z.B. $a_1 := a - 1$ für ein $a \in M$. Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ bereits so definiert, dass $b_1, \ldots, b_n$ obere Schranken und $a_1, \ldots, a_n$ keine obere Schranken sind. Dann sei $m_n := \frac{1}{2}(b_n + a_n)$. Das Intervall

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, m_n] & \text{falls } m_n \text{ obere Schranke} \\ [m_n, b_n] & \text{falls } m_n \text{ keine solche} \end{cases}$$

liegt in $[a_n, b_n]$ und ist halb so lang. Damit ist eine Intervallschachtelung definiert. Sei nun $\{s\} := \bigcap_n [a_n, b_n]$ gemäß (I) und (5).

Zeige zunächst, dass s eine obere Schranke ist. Angenommen es existiert ein $x \in M$ mit $s < x$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < x - s$. Weil $s \in [a_n, b_n]$, folgt $b_n - s < x - s$ und somit $b_n < x$, weshalb b_n keine obere Schranke ist. Das ist ein Widerspruch.

Zeige jetzt, dass s die kleinste obere Schranke ist. Angenommen es existiert eine obere Schranke $s' < s$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < s - s'$. Weil $s \in [a_n, b_n]$, folgt $s - a_n < s - s'$ und somit $a_n > s'$, weshalb a_n eine obere Schranke ist. Das ist ein Widerspruch. $\square$

(12) Bemerkung. (11) besagt: (I) $\Longrightarrow$ (S). Es gilt auch: (S) $\Longrightarrow$ (I).

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise (S) $\Longrightarrow$ (I).

(13) Beispiel. Ist $\emptyset \neq M \subset \mathbb{Z}$ nach oben (unten) beschränkt, dann existiert $\max M$ $(\min M)$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise (13).

(14) Satz. *$\mathbb{Q}$ **liegt dicht in** $\mathbb{R}$, d.h. für jedes offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Mit anderen Worten: $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\ \ \exists\ q \in \mathbb{Q} : a < q < b.$

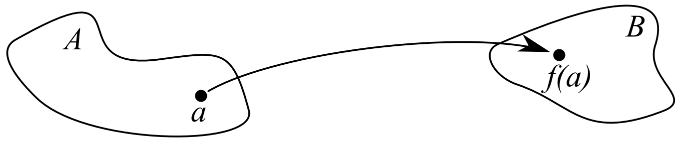
Beweis. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es $q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{b-a} < q$, weshalb $\frac{1}{q} < b - a$. Nun existiert nach (13) ein minimales $p \in \mathbb{Z}$ mit $p > qa$. Daraus folgt $a < \frac{p}{q} = \frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} < a + b - a = b$. Also ist $\frac{p}{q} \in]a, b[$. $\square$

Zur Eigenschaft (C) (d.i. die Konvergenz von Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$) kommen wir später.

Abzählbarkeit

(15) Definition. Seien A und B Mengen.

- $f : A \to B$ sei eine **Abbildung**, d.h. jedem $a \in A$ ist ein $f(a) \in B$ zugeordnet. Man schreibt: $a \mapsto f(a)$. Für $a \in A$ nennt man $b := f(a)$ das **Bild** in B von a unter f. In diesem Zusammenhang ist dann a ein **Urbild** von b unter f. A heißt der **Definitionsbereich** und B der **Bildbereich** von f.



- $f : A \to B$ heißt **konstant**, wenn ein $b_0 \in B$ existiert mit $f(a) = b_0$ für alle $a \in A$.
- $f : A \to B$ heißt **injektiv** (oder eineindeutig), wenn für alle $a', a \in A$ gilt: $f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'$. In Worten heißt das, dass verschiedene Elemente des Definitionsbereichs verschiedene Bilder haben.
- $f : A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$. In Worten heißt das, dass jedes Element des Bildbereichs (mindestens) ein Urbild besitzt.

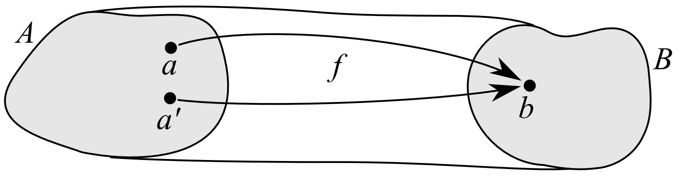


Abbildung 2.1: f surjektiv aber nicht injektiv

- $f : A \to B$ heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist. M.a.W. besitzt jedes Element des Bildbereichs genau ein Urbild.

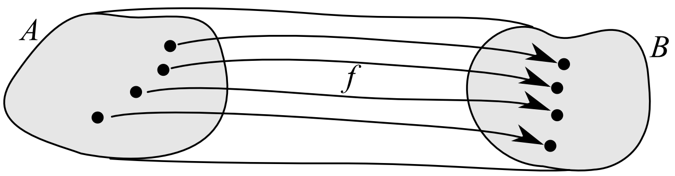


Abbildung 2.2: f bijektiv

- A und B heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.
- B hat eine **größere Mächtigkeit** als A, wenn A gleichmächtig zu einer Teilmenge von B ist, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel hat für $m, n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{1, \dots, n\}$ genau dann eine größere Mächtigkeit als die Menge $\{1, \dots, m\}$, wenn $n > m$.
- A heißt **abzählbar unendlich**, wenn A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind. M.a.W. ist A abzählbar unendlich genau dann, wenn eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ existiert. Zu jedem $a \in A$ gibt es genau eine "Nummer" $n \in \mathbb{N}$ mit $a = f(n)$ und jede Nummer kommt vor.

- A heißt **(höchstens) abzählbar**, wenn A entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.

Abbildungen von $\mathbb{N}$ in eine Menge A werden oftmals mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_n = (a_n)$ bezeichnet. Dabei heißt (a_n) auch **Folge** in A.

(16) Satz. *$A \subset \mathbb{N} \Longrightarrow A$ abzählbar.*

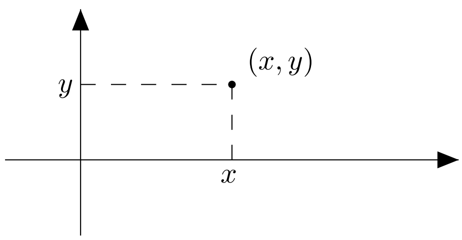
Beweis. Sei A nicht endlich. Es folgt die rekursive Definition einer Bijektion $\mathbb{N} \to A$, $n \mapsto a_n$. Setze $a_1 := \min A$. Sind $a_1, \dots, a_n \in A$ bereits definiert, so setze $a_{n+1} := \min(A \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. Die Injektivität ist klar; die Surjektivität gilt, weil $\{b \in A : b \leq a\}$ endlich ist für jedes $a \in A$. □

(17) Korollar. *$\emptyset \neq A$ abzählbar $\Longleftrightarrow \exists\, f : \mathbb{N} \to A$ surjektiv.*

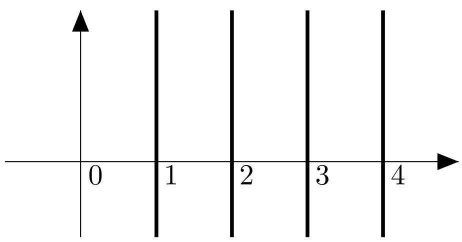
Beweis. "$\Longrightarrow$" ist klar. — Zu "$\Longleftarrow$" bezeichne $f^{-1}(\{a\})$ die Menge aller Urbilder von $a \in A$ unter f und $n_a := \min f^{-1}(\{a\})$ das kleinste dieser Urbilder. Für $\tilde{A} := \{n_a : a \in A\} \subset \mathbb{N}$ ist dann $A \to \tilde{A}$, $a \mapsto n_a$ offenbar eine Bijektion. Mit (16) folgt daraus die Behauptung. □

(18) Definition. Seien A und B Mengen. Das **kartesische Produkt** $A \times B$ ist die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Beispiele. $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ euklidische Ebene

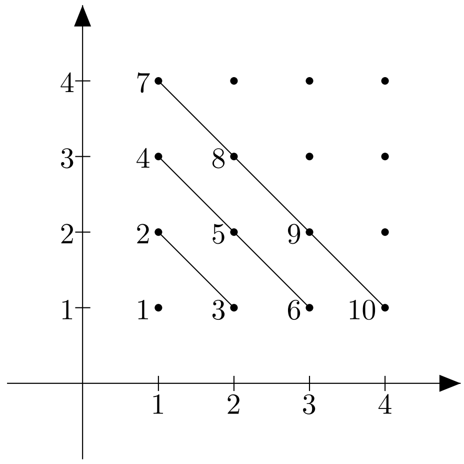


$\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{(n, x) : n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\}$



(19) Satz. *Sind A und B abzählbar, dann ist auch $A \times B$ abzählbar.*

Beweis. Man überlege sich, dass o.E. $A = B = \mathbb{N}$ angenommen werden kann. Also ist zu zeigen, dass $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Betrachte die folgende Bijektion:



$$\underbrace{(1,1)}_{1},\ \underbrace{(1,2)}_{2},\ \underbrace{(2,1)}_{3},\ \underbrace{(1,3)}_{4},\ \underbrace{(2,2)}_{5},\ \underbrace{(3,1)}_{6},\dots \text{ u.s.w.}$$

$\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ Finde eine explizite Formel für die Bijektion im Beweis von (19).

Weil $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\times\mathbb{N}$ die Vereinigung von abzählbar vielen paarweise disjunkten abzählbaren Mengen ist, folgt mit (17) daraus

(20) Korollar. *Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.*

(21) Lemma. $\mathbb{Z}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(n) := \frac{n}{2}$ falls n gerade und $\frac{1-n}{2}$ falls n ungerade, ist offensichtlich eine Bijektion. $\square$

Also ist $\mathbb{Z}$ zu einer echten Teilmenge gleichmächtig. Genau für endliche Mengen ist dies nicht möglich. Weil die Abbildung $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \mapsto \frac{p}{q}$, surjektiv ist, folgt daher mit (19), (17)

(22) Korollar. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

(23) Satz. $\mathbb{R}$ *ist* ***überabzählbar*** *(d.h. nicht abzählbar).*

Beweis. Angenommen es gibt eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$. Definiere rekursiv eine Intervallschachtelung (I_n) derart, dass

$$x_n \notin I_n \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Setze $I_1 := [x_1+1, x_1+2]$. Seien $I_1, I_2, \dots, I_n$ bereits so definiert, dass $(*)$ gilt. Wähle $I_{n+1} \subset I_n$ und $\frac{1}{3}$ so lang mit $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Sei nun $\{s\} := \bigcap_n I_n$. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = s \in I_k$. Das ist aber ein Widerspruch zu $(*)$. $\square$

(24) Korollar. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Sonst wäre $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ abzählbar nach (20). $\square$

3 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert als

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

mit folgender additiver und multiplikativer Verknüpfung. Für $z = (x,y)$, $w = (u,v)$ aus $\mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} z + w &:= (x,y) + (u,v) = (x+u, y+v), \\ z \cdot w &:= (xu - yv, xv + yu). \end{aligned}$$

(1) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein **Körper**, denn es gelten (K1)–(K4) aus Kapitel 2. Das verifiziert man direkt. So gelten z.B. für alle $z \in \mathbb{C}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} z + (0,0) &= z, \\ z\,(1,0) &= z. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\mathbf{0} := (0,0)$ das Nullelement oder die Null und $\mathbf{1} := (1,0)$ das Einselement oder die Eins ist. Die inversen Elemente bez. Addition und Multiplikation sind daher

$$\begin{aligned} -z &= (-x, -y), \\ \frac{1}{z} &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) \text{ für } z \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Entscheidend für die Einführung der komplexen Zahlen ist die Beziehung

$$(0,1)^2 = -\mathbf{1},$$

d.h. $(0,1)$ ist eine Lösung von $z^2 = -\mathbf{1}$. Eine weitere Lösung hierfür ist dann offenbar auch $-(0,1)$.

(2) Schreibweisen und Bezeichnungen

$$\begin{aligned} z &= (x,y) =: x + iy \\ i &:= 0 + 1 \cdot i \quad \textbf{imaginäre Einheit} \\ x &:= \operatorname{Re} z \quad \textbf{Realteil} \text{ von } z \\ y &:= \operatorname{Im} z \quad \textbf{Imaginärteil} \text{ von } z \\ 1 &= \mathbf{1} = 1 + i \cdot 0 \quad \textbf{Eins} \\ 0 &= \mathbf{0} = 0 + i \cdot 0 \quad \textbf{Null}. \end{aligned}$$

Seien $z = x + iy$, $w = u + iv$ aus $\mathbb{C}$. Damit lautet die **Addition**:

$$z + w = (x+u) + i(y+v),$$

d.h. $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}\ z + \mathrm{Re}\ w$ und $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}\ z + \mathrm{Im}\ w$. Für die **Multiplikation** erhält man:

$$z\,w = xu - yv + i(xv + yu),$$

d.h. $\mathrm{Re}(zw) = \mathrm{Re}\ z\ \mathrm{Re}\ w - \mathrm{Im}\ z\ \mathrm{Im}\ w$ und $\mathrm{Im}(zw) = \mathrm{Re}\ z\ \mathrm{Im}\ w + \mathrm{Im}\ z\ \mathrm{Re}\ w$. Damit läßt sich praktisch rechnen:

$$\begin{aligned}&(x+iy)+(u+iv) = x+u+i(y+v),\\ &(x+iy)\,(u+iv) = xu + (iyiv) + i(xv+yu) = xu + i^2yv + i(xv+yu) = xu - yv + i(xv+yu),\end{aligned}$$

wobei die entscheidende Beziehung

$$\boxed{i^2 = -1}$$

von oben benutzt wurde. Speziell gilt

$$\alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha z = \alpha x + i\alpha y, \quad i\alpha z = -\alpha y + i\alpha x.$$

Das Rechnen mit konkreten Zahlen sieht dann z.B. so aus:

$$(2+5i)(5-2i) = 10 - (5i)(2i) - 4i + 25i = 20 + 21i.$$

Weiter lauten die inversen Elemente

$$\begin{aligned}-z &= -x - iy,\\ \frac{1}{z} &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{für } z \neq 0.\end{aligned}$$

(3) Weitere Struktur der komplexen Zahlen. Offenbar ist

$$\{x + i0 : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

ein **Unterkörper** von $\mathbb{C}$, der mit $\mathbb{R}$ selbst identifiziert wird. Demgemäß ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Es heißt

z **reell** oder $z \in \mathbb{R}$, wenn $\mathrm{Im}\ z = y = 0$.
z **rein imaginär**, wenn $\mathrm{Re}\ z = x = 0$.

Wichtig sind noch die folgenden Operationen mit komplexen Zahlen:

$\overline{z} := \mathrm{Re}\ z - i\ \mathrm{Im}\ z = x - iy$ die zu z **konjugiert komplexe Zahl**,
$|z| := \sqrt{(\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ **der Betrag** von z.

(4) Rechenregeln zur Konjugation

- $\mathrm{Re}\ z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathrm{Im}\ z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
- $|z|^2 = z\overline{z}$, d.h. $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ und $z\overline{z} \geq 0$

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- z reell $\Longleftrightarrow z = \overline{z}$

Beweis. Die Aussagen sind leicht zu verifizieren. □

(5) Rechnen mit dem Betrag

- $|z| > 0 \Longleftrightarrow z \neq 0$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|\text{Re } z| \leq |z|$ und $|\text{Im } z| \leq |z|$
- $|\text{Re } z| = |z| \Longleftrightarrow z$ reell
- $|zw| = |z||w|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung

Beweis.
- $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = zw\overline{z}\overline{w} = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2$.
- $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + 2\text{Re } z\overline{w} \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = (|z| + |w|)^2$. Die letzte Gleichheit gilt weil $|z\overline{w}| = |z||w|$.

Der restlichen Aussagen sind klar.

□

Das **Reellmachen des Nenners** dient der Ermittlung von Realteil und Imaginärteil eines Bruches zweier komplexer Zahlen:

$$z \neq 0: \quad \frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{ux + vy + i(vx - uy)}{x^2 + y^2} = \frac{ux + vy}{x^2 + y^2} + i\frac{vx - uy}{x^2 + y^2}$$

Als Beispiel berechne $\frac{2+5i}{5+2i} = \frac{(2+5i)(5-2i)}{25+4} = \frac{10+10+i(25-4)}{29} = \frac{20}{29} + \frac{21}{29}i$.

Algebraische Gleichungen für komplexe Zahlen führen auf zwei Gleichungen für Real- und Imaginärteil. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$z^2 = a + ib. \tag{3.1}$$

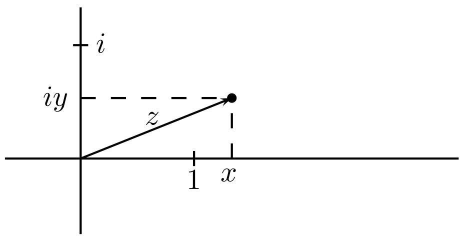
Sie bedeutet $(x+iy)^2 = a + ib$ mit Unbekannten $x = \text{Re } z$ und $y = \text{Im } z$. Daher gilt $x^2 - y^2 + i2xy = a + ib$, d.h. es gelten die Gleichungen $x^2 - y^2 = a$ und $2xy = b$. Man findet die Lösungen durch Elimination. Sei $b \neq 0$. Dann ist $x \neq 0$ und somit $y = \frac{1}{2}b/x$. Also muss x die biquadratische Gleichung $x^4 - ax^2 - b^2/4 = 0$ erfüllen. Von den 4 Lösungen dieser Gleichung sind nur die beiden $\pm\left[\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\right]^{1/2}$ reell (warum?). Daraus ergeben sich als einzig mögliche Lösungen der Ausgangsgleichung

$$z=\pm\left(\left[\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\right]^{1/2}+i\beta\left[\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\right]^{1/2}\right), \tag{3.2}$$

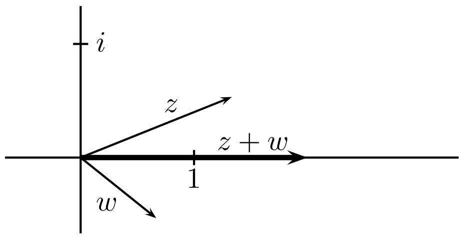
wobei $\beta:=1$ falls $b\geq 0$ und $\beta:=-1$ falls $b<0$. Durch direkte Rechnung prüft man nach, dass diese in der Tat Lösungen (auch im Fall $b=0$) von $z^2=a+ib$ sind.

(6) Komplexe Zahlenebene

Komplexe Zahlen kann man durch Vektoren im $\mathbb{R}^2$ darstellen.



Dabei entspricht der Addition zweier komplexer Zahlen die Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$, d.h. die komponentenweise Addition. Dies ist unmittelbar einsichtig.



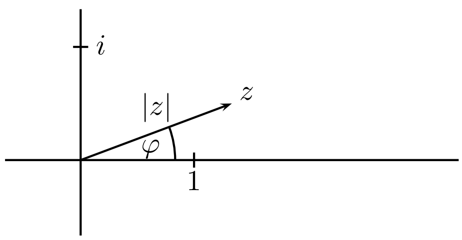
Bei der Multiplikation hingegen multiplizieren sich die Längen und die Polarwinkel addieren sich. Dazu gewinnt man zunächst aus

$$x=\mathrm{Re}\ z=|z|\cos\varphi,\quad y=\mathrm{Im}\ z=|z|\sin\varphi$$

mit $\varphi\in[0,2\pi[$ die Darstellung von z in Polarkoordinaten

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

wobei $|z|$ die **Länge** und φ der **Polarwinkel** des z darstellenden Vektors ist.

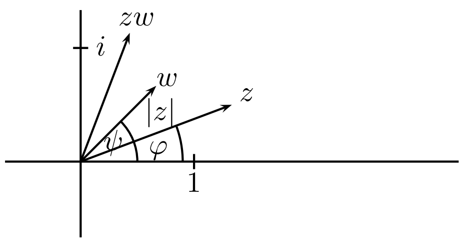


Mit der entsprechenden Polardarstellung für w

$$w=|w|(\cos\phi+i\sin\psi)$$

findet man die behauptete Polardarstellung des Produkts

$$z\,w=|z||w|(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi+i(\sin\varphi\cos\psi+\sin\psi\cos\varphi))=|z||w|(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$



Man beachte, dass $\varphi+\psi \geq 2\pi$ sein kann. Gegebenenfalls ist der Polarwinkel $(\varphi+\psi-2\pi) \in [0, 2\pi[$, was geometrisch unmittelbar einsichtig ist.

Wir bestimmen die Polardarstellung von $-z$, $\overline{z}$ und $1/z$:

$$-z = |z|(-\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|(\cos(\varphi+\pi) + i\sin(\varphi+\pi)),$$

d.h. der Polarwinkel von $-z$ ist $\varphi + \pi$ oder $\varphi - \pi$;

$$\overline{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + i\sin(-\varphi)) = |z|(\cos(2\pi-\varphi) + i\sin(2\pi-\varphi)),$$

d.h. der Polarwinkel von $\overline{z}$ ist $2\pi - \varphi$;

$$\begin{aligned} z \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{z} &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2}|z|(\cos(2\pi-\varphi) + i\sin(2\pi-\varphi)) = \\ &= \frac{1}{|z|}(\cos(2\pi-\varphi) + i\sin(2\pi-\varphi)), \end{aligned}$$

d.h. die Länge von $\frac{1}{z}$ ist $\frac{1}{|z|}$ und der Polarwinkel von $\frac{1}{z}$ ist $2\pi - \varphi$.

Schließlich lösen wir die Gleichung (3.1)

$$z^2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{3.3}$$

in der Polardarstellung. Man findet sofort (vgl. (3.2))

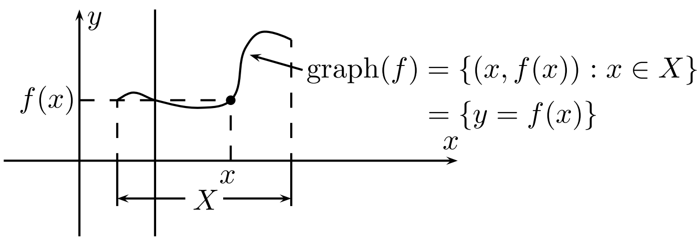
$$z_1 = \sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) \text{ und } z_2 = \sqrt{r}(\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi)). \tag{3.4}$$

4 Funktionen

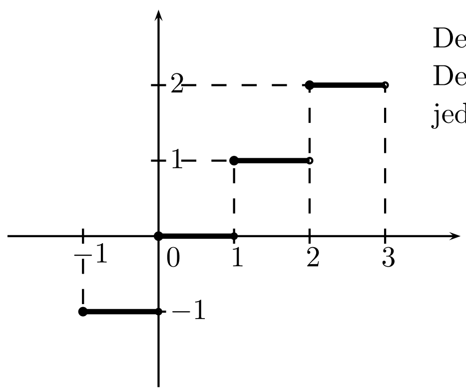
(1) Definition. Eine **reell-** oder **komplexwertige Funktion** auf einer Menge X ist eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ bzw. $f : X \to \mathbb{C}$. Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Man nennt

- X den **Definitionsbereich** von f,
- $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$ den **Wertebereich** von f,
- $\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times \mathbb{K}$ den **Graph** von f.

Ist $X \subset \mathbb{R}$ und f reellwertig, dann ist $\operatorname{graph}(f)$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Sie kann oftmals als Linie in der Zeichenebene dargestellt werden, die jede Parallele zur y-Achse höchstens einmal schneidet.



(2) Beispiel. Die **Gauß-Klammer** $[.] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$ ist die größte ganze Zahl $\leq x$, d.h. $[x] \in \mathbb{Z}$ und $x - 1 < [x] \leq x$.



Der Wertebereich ist $\mathbb{Z}$.
Der Graph springt bei
jeder ganzen Zahl x.

(3) Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}$. Dann heißt $f : X \to \mathbb{R}$ **monoton wachsend**, wenn

$$\forall x, x' \in X,\ x < x' :\ f(x) \leq f(x')$$

und **streng monoton wachsend**, wenn

$$\forall x, x' \in X,\ x < x' :\ f(x) < f(x').$$

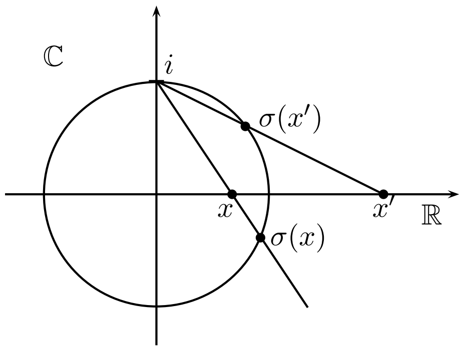
Analog definiert man **(streng) monoton fallend**.

Beispiel. Die Gauß-Klammer ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

Beispiel. Die folgenden Funktionen von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$ heißen **affine** Abbildungen. Sie sind bijektiv. Sei $a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto a + z, &&\text{Verschiebung oder Translation}\\ &\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto bz, &&\text{Drehstreckung} \end{aligned}$$

(4) Die Stereographische Projektion $\sigma : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{i\}$ ordnet jedem $x \in \mathbb{R}$ den Schnittpunkt $\sigma(x)$ der Geraden durch x und i mit der 1-Sphäre (oder Einheitskreislinie) $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ zu.



$\boxed{\text{Üb}}$ Ermittle geometrisch die Formel

$$\sigma(x) = \frac{2x + i(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass σ bijektiv ist und berechne die Umkehrfunktion $\sigma^{-1} : S^1 \setminus \{i\} \to \mathbb{R}$. Dabei ist σ^{-1} bestimmt durch die Eigenschaft $\sigma^{-1}(\sigma(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(5) Definition. Algebraische Operationen von Funktionen werden punktweise definiert. Aus $f, g : X \to \mathbb{K}$ werden neue Funktionen auf X wie folgt gebildet:

$$\begin{aligned} f + g : X \to \mathbb{K},\ (f+g)(x) &:= f(x) + g(x),\\ fg : X \to \mathbb{K},\ (fg)(x) &:= f(x)g(x). \end{aligned}$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ definiert man

$$\begin{aligned} \overline{f} : X \to \mathbb{C},\ \overline{f}(x) &:= \overline{f(x)},\\ \mathrm{Re}f : X \to \mathbb{C},\ (\mathrm{Re}f)(x) &:= \mathrm{Re}(f(x)),\\ \mathrm{Im}f : X \to \mathbb{C},\ (\mathrm{Im}f)(x) &:= \mathrm{Im}(f(x)). \end{aligned}$$

Außerdem sei, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$:

$$\frac{f}{g} : X \to \mathbb{K}, \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(6) Definition. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist die **komponierte Abbildung** oder zusammengesetzte Abbildung $g \circ f : X \to Z$ definiert durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für alle $x \in X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

(7) Beispiel. Sei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$ und $D := ad - bc \neq 0$. Dann heißt

$$T : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}, \ T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

gebrochen-lineare Transformation auf $\mathbb{C}$. Betrachte die affinen Transformationen

$$\begin{aligned} A_1 &: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ A_1(z) := cz + d, \\ A_2 &: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ A_2(z) := -\frac{D}{c} z + \frac{a}{c}, \end{aligned}$$

sowie die **Inversion**

$$I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \ I(z) := \frac{1}{z}.$$

Dann gilt für alle $z \neq -\frac{d}{c}$:

$$\begin{aligned} (A_2 \circ I \circ A_1)(z) &= (A_2 \circ I)(A_1(z)) = (A_2 \circ I)(cz + d) = A_2(I(cz + d)) = \\ &= A_2\left(\frac{1}{cz + d}\right) = -\frac{D}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} = \frac{-D + a(cz + d)}{c(cz + d)} = \\ &= \frac{-ad + bc + acz + ad}{c(cz + d)} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = T(z). \end{aligned}$$

(8) Satz zur Umkehrabbildung. *Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ injektiv. Dann existiert genau eine Abbildung $g : f(X) \to X$ mit*

$$g(f(x)) = x \quad \textit{für alle} \ \ x \in X.$$

Es folgt, dass $f(g(y)) = y$ für alle $y \in f(X)$ und dass g bijektiv ist. Die Abbildung g heißt die **Umkehrabbildung** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

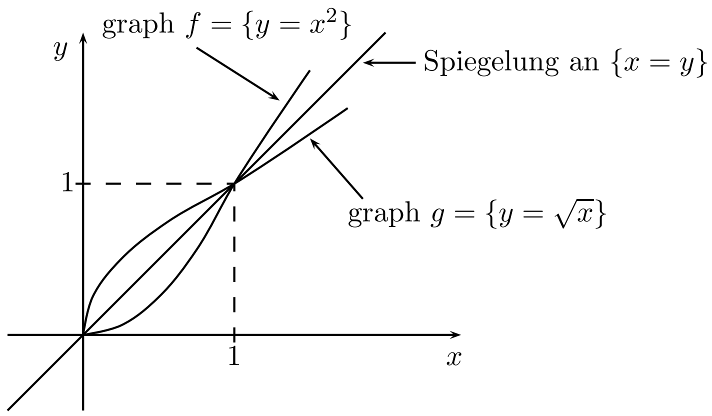
Beweis. Es wird zunächst die Existenz von g gezeigt. Dazu sei $y \in f(X)$. Weil f injektiv ist, existiert genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$. Setze $g(y) := x$. Dann gilt $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$. — Die Eindeutigkeit von g folgt sofort aus letzterem. — Für alle $y \in f(X)$ gilt nun $f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x) = y$. Schließlich ist g surjektiv wegen $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ und injektiv wegen $f(g(y)) = y$ für alle $y \in f(X)$. □

(9) Lemma. *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$. Dann gilt: f streng monoton $\Longrightarrow$ f injektiv.*

Beweis. Sei o.E. f streng monoton wachsend. Weiter sei $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$. Dann sei o.E. $x < x'$. Es folgt $f(x) < f(x')$. Insbesondere ist $f(x) \neq f(x')$. □

(10) Korollar. *Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ streng monoton,. Dann existiert genau eine Funktion $g : f(X) \to \mathbb{R}$, die $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ erfüllt. Sie ist im gleichen Sinn streng monoton wie f.*

Man nennt g die **Umkehrfunktion** von f mit Wertebereich X. (Beachte, dass g hier nach $\mathbb{R}$ statt –wie in (8)– nach X ($\subset \mathbb{R}$) abbildet.) Offenbar ist graph $g = \{(y, x) : y = f(x),\ x \in X\}$ die Spiegelung von graph f an der Winkelhalbierenden. Als Beispiel betrachte $f(x) := x^2$ für $x \geq 0$:



(11) Definition. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$. Für jede Teilmenge $M \subset Y$ ist

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : f(x) \in M\} \subset X.$$

Damit ist $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$. f^{-1} ist für jede Abbildung definiert — nicht zu verwechseln mit der Umkehrabbildung einer injektiven Funktion f. Die folgenden Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen. Seien $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(Y)$ und $M_1, M_2 \in \mathcal{P}(Y)$. Dann gilt:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M\right) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} f^{-1}(M),$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M\right) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} f^{-1}(M),$$
$$f^{-1}(M_1 \setminus M_2) = f^{-1}(M_1) \setminus f^{-1}(M_2).$$

Also "erhält" f^{-1} die mengentheoretischen Operationen.

(12) Definition rationaler Exponenten. Sei $a \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{Q}$. Setze

$$a^r := \sqrt[q]{a^p} \quad \text{für } r = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}.$$

Es ist nachzuweisen, dass a^r wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Darstellung $r = \frac{p}{q}$ ist. Sei also $r = \frac{pk}{qk}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x := \sqrt[qk]{a^{pk}}$. Für $p = 0$ ist $x = \sqrt[qk]{1} = 1$ und für $p < 0$ ist $x = \sqrt[qk]{\left(\frac{1}{a}\right)^{|p|k}}$, jeweils unabhängig von $k \in \mathbb{N}$. Daher kann jetzt o.E. $p > 0$ angenommen werden. Dann gilt $x^{qk} = a^{pk}$ (nach Definition von x und der qk-ten Wurzel), weshalb $\underbrace{x^q \cdot \ldots \cdot x^q}_{k-\text{mal}} = \underbrace{a^p \cdot \ldots \cdot a^p}_{k-\text{mal}}$, d.h. $(x^q)^k = (a^p)^k$. Nach dem Satz (2.7) zur k-ten Wurzel folgt daraus $x^q = a^p$. Zieht man jetzt nach (2.7) auf beiden Seiten die q-te Wurzel, so folgt die Behauptung $x = \sqrt[q]{a^p}$.

(13) Lemma. *$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^r$ wächst (fällt) streng monoton für $r > 0$ ($r < 0$). Die Umkehrfunktion (vgl. (10)) ist $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{r}}$.*

(14) Lemma. *Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt*

$$a^{r+s} = a^r a^s \quad \forall\, r, s \in \mathbb{Q}.$$

Die Beweise von (13) und (14) sind einfach.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeichne die Graphen von $x \mapsto x^r$ für $r = 2, \frac{1}{2}$, sowie für $r = -2, -\frac{1}{2}$, jeweils in eine Zeichnung. — Zeichne die Graphen von $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ für $a = 2, \frac{1}{2}$ in ein Koordinatensystem. Zeichne auch die Graphen der Umkehrfunktionen ein.

Bemerkung. Später wird a^z für $a \in \mathbb{R}_+$ und alle $z \in \mathbb{C}$ erklärt.

Polynome

(15) Definition.

$$p := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

heißt **komplexes (reelles) Polynom** in einer **Unbestimmten** X mit komplexen (reellen) Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. (Für X kann alles mögliche stehen: Zahlen, quadratische Matrizen, Operatoren etc.)

Ist $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n \neq 0$, dann heißt n der **Grad** von p. Er wird mit $\operatorname{grad} p$ bezeichnet. Weiter heißt in diesem Fall a_n der **Leitkoeffizient** von p. Sind alle $a_k = 0$ dann ist $p = 0$ das **Nullpolynom**. Diesem wird kein Grad zugeordnet. Die im folgenden benutzte Sprechweise "p ist Polynom vom Grad $\leq n$ ($< n$)" schließt jedoch $p = 0$ nicht aus.

$\mathbb{C}[X]$ ($\mathbb{R}[X]$) bezeichnet die Menge aller komplexen (reellen) Polynome. Allgemeiner bezeichnet $K[X]$ die Menge der Polynome über einem Körper K, wie z.B. auch $\mathbb{Q}$.

Sei nun $q := \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ ein weiteres Polynom. Falls $m < n$, setze $b_{m+1} = \ldots = b_n = 0$; falls $n < m$ setze analog $a_{n+1} = \cdots = a_m = 0$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
p + q &:= \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) X^k, \\
p\, q &:= \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{mit } c_k := \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ für } k = 0, \ldots, n+m.
\end{aligned}
$$

Also sind Summen und Produkte von Polynomen wieder Polynome. Insbesondere sind es skalare Vielfache. Im Fall $\operatorname{grad} p \neq \operatorname{grad} q$ ist offenbar $\operatorname{grad}(p+q) = \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\}$. Da $c_{n+m} = a_n b_m$, folgt $\operatorname{grad}(pq) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q$, falls $p \neq 0$, $q \neq 0$.

(16) Satz. ***Division mit Rest.*** *Sei $q \in K[X] \setminus \{0\}$. Dann gilt: $\forall\, p \in K[X]\ \exists_1 h \in K[X]\ \exists_1 r \in K[X]$:*

$$p = hq + r \quad \textit{mit } r = 0 \textit{ oder grad } r < \textit{grad } q.$$

Beweis. Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Darstellung nehme man an, dass auch $p = h_1 q + r_1$ gilt mit r_1 vom Grad kleiner $\operatorname{grad} q$. Dann ist $hq + r = h_1 q + r_1$, weshalb $(h - h_1) q = r_1 - r$ vom Grad kleiner $\operatorname{grad} q$ ist. Das impliziert $h - h_1 = 0$ und somit $r - r_1 = 0$.

Nun wird die Existenz bewiesen. Falls grad $p <$ grad q, dann ist $p = 0 \cdot q + p$ bereits die behauptete Darstellung. Sei nun

$$p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{und} \quad q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

mit $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ und $n \geq m =$ grad q. Man bilde

$$p_1 := p - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} q. \tag{4.1}$$

Damit ist bezweckt, dass p_1 vom Grad $< \operatorname{grad} p = n$ ist. Falls p_1 vom Grad $< m$ ist, dann ist das Ziel erreicht. Anderenfalls ist $m \leq n_1 :=$ grad $p_1 < n$. Dann subtrahiere man von p_1 analog zu (4.1) ein Vielfaches von q, so dass die Differenz p_2 vom Grad $< n_1$ ist. Falls p_2 vom Grad $< m$ ist, dann ist das Ziel erreicht. Anderenfalls ist $m \leq n_2 :=$ grad $p_2 < n_1$. Man fahre so fort, bis schließlich nach l Schritten (mit $l \leq n - m + 1$) ein Restpolynom $r := p_l$ vom Grad $< m$ entsteht. □

Ist in (16) das Restpolynom $r = 0$, dann heißt q ein **Teiler** von p. Die Polynome $p \neq 0$ und $q \neq 0$ heißen **teilerfremd**, wenn nur die Polynome vom Grad 0 (d.h. die konstanten Polynome $\neq 0$) sowohl p als auch q teilen.

Sei nun in (16) speziell $q = X - \alpha$ mit $\alpha \in K$. Dann gilt

$$p = (X - \alpha) h + r \quad \text{mit } r \in K.$$

Setzt man hierin an die Stelle der Unbestimmten X die Zahl $\alpha \in K$, so folgt $r = p(\alpha)$. Man nennt $\alpha \in K$ eine **Nullstelle** von p, wenn $r = p(\alpha) = 0$. Es gilt also

(17) Lemma. ***Abspaltung eines Linearfaktors.*** *Es ist $\alpha \in K$ genau dann eine Nullstelle von p, wenn p durch $X - \alpha$ teilbar, d.h.*

$$p = (X - \alpha)h.$$

Dabei ist entweder $h = 0$, $p = 0$ oder $h \neq 0$, grad $p = 1+$ grad h.

Hat auch h eine Nullstelle, so läßt sich ein weiterer Linearfaktor abspalten.

(18) Korollar. *Jedes Polynom $p \neq 0$ vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach $n = \operatorname{grad} p$. Für $n = 0$ ist die Behauptung offenkundig. Sei nun $\operatorname{grad} p = n + 1$ und α eine Nullstelle von p. Nach (17) ist $p = (X - \alpha)h$ mit $\operatorname{grad} h = n$. Damit ist jede von α verschiedene Nullstelle von p eine Nullstelle von h. Die Behauptung folgt durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf h. □

(19) Korollar. ***Identitätssatz für Polynome.*** *Stimmen die Werte der Polynome*

$$\begin{aligned} p &= a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \\ q &= b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n \end{aligned}$$

an $n + 1$ verschiedenen Stellen überein, so gilt $a_k = b_k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ und damit $p = q$.

Beweis. Das Differenzpolynom $p - q$ hat $n + 1$ verschiedene Nullstellen und ist vom Grad $\leq n$. Nach (18) ist es daher das Nullpolynom. □

Auf (19) beruht die Methode des **Koeffizientenvergleichs**. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

(20) Der Allgemeine Binomialkoeffizient für $z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\binom{z}{k} := \begin{cases} \frac{1}{k!} z(z-1) \cdot \ldots \cdot (z-k+1) & \text{für } k > 0, \\ 1 & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Beispielsweise ist $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ und $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k k!}$. — Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\binom{z}{n}$ ein Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizient $\frac{1}{n!}$ und Nullstellen $0, 1, \ldots, n - 1$. Damit beweisen wir das

Additionstheorem: $\forall s, t \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}. \tag{4.2}$$

Beweis. Im ersten Schritt seien $s, t \in \mathbb{N}$ fest. Nach der binomischen Formel erhält man

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^{s+t} & = & \displaystyle\sum_{l=0}^{s+t}\binom{s+t}{l}x^l \\ \Vert & & \\ (1+s)^t(1+s)^t & = & \displaystyle\left(\sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}x^j\right) = \sum_{\substack{i=0,\dots,s\\ j=0,\dots,t}}\binom{s}{i}\binom{t}{j}x^{i+j} = \\ & = & \displaystyle\sum_{l=0}^{s+t}\left(\sum_{k=0}^{l}\binom{s}{k}\binom{t}{l-k}\right)x^l \end{array}$$

Wegen der Gleichheit der Polynome in x liefert der Koeffizientenvergleich: $\binom{s+t}{l} = \sum_{k=0}^{l}\binom{s}{k}\binom{t}{l-k}$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$. — Im zweiten Schritt sei $t \in \mathbb{N}$ fest. In (4.2) stehen zwei Polynome in s, die nach dem ersten Schritt für alle $s \in \mathbb{N}$ übereinstimmen. Nach (19) folgt die Gleichheit für alle $s \in \mathbb{C}$. — Im letzten Schritt sei $s \in \mathbb{C}$ fest. In (4.2) stehen zwei Polynome, die nach nach dem zweiten Schritt für alle $t \in \mathbb{N}$ übereinstimmen. Mit (19) folgt die Behauptung. □

(21) Definition. Sei $p \in K[X]$, $\alpha \in K$ und $k \in \mathbb{N}$. Ist p durch $(X-\alpha)^k$ aber nicht durch $(X-\alpha)^{k+1}$ teilbar, dann heißt α eine **k-fache Nullstelle von** p. Man setzt $k = 0$, falls α keine Nullstelle von p ist.

$\boxed{\text{Üb}}$ Sei $p \in K[X]$, $p \neq 0$, seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ paarweise verschieden und sei α_i eine k_i-fache Nullstelle von p für $i = 1, \dots, r$. Zeige:

$$p = (X-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (X-\alpha_r)^{k_r} h$$

für ein $h \in K[X]$, $h \neq 0$.

(22) Zerlegung über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. *Jedes nichtkonstante $p \in \mathbb{C}[X]$ besitzt eine Darstellung*

$$p = \alpha(X-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (X-\alpha_r)^{k_r}$$

mit $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ und $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$. Die Darstellung ist eindeutig, wenn die α_j paarweise verschieden sind.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus (17) und dem Fundamentalsatz der Algebra, den wir später beweisen werden. □

Fundamentalsatz der Algebra: *Jedes nichtkonstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle.*

Reelle Polynome können im Allgemeinen nicht in reelle Linearfaktoren zerlegt werden. Das fundamentale Beispiel dazu ist X^2+1. Stattdessen gilt (23). Dazu dient die folgende Überlegung.

Sei $p \in \mathbb{R}[X]$. Man fasse p als komplexes Polynom auf, und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, d.h. $p(\alpha) = 0$. Dann ist auch $\overline{\alpha}$ Nullstelle von p, denn

$$p(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{\in\mathbb{R}} (\overline{\alpha})^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \alpha^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k} = \overline{p(\alpha)} = 0.$$

Die nichtreellen Nullstellen von p treten also in Paaren konjugierter Nullstellen auf. Deshalb ist

$$\begin{aligned} (X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) &= X^2 - 2(\mathrm{Re}\ \alpha)X + |\alpha|^2 = \\ &= X^2 + \beta X + \gamma \quad \text{mit} \ \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 < \gamma \\ &=: q \end{aligned}$$

ein Teiler von p.

(23) Korollar. *Jedes nichtkonstante $p \in \mathbb{R}[X]$ besitzt eine Darstellung*

$$p = \alpha(X-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (X-\alpha_r)^{k_r} q_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot q_s^{l_s}$$

mit $\alpha, \alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, r$,

$$q_j = X^2 + \beta_j X + \gamma_j, \quad \left(\frac{\beta_j}{2}\right)^2 < \gamma_j, \quad j = 1, \ldots, s$$

und $k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$. Die Darstellung ist eindeutig, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und $q_1, \ldots, q_s$ paarweise verschieden sind. (Falls keine Linearfaktoren oder quadratische Faktoren auftreten, ist $r = 0$ bzw. $s = 0$ gesetzt.)

Rationale Funktionen

(24) Definition. R heißt **rationale Funktion**, wenn p, $q \in \mathbb{C}[X]$ mit $q \neq 0$ existieren so, dass

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{für alle} \ \ z \in \mathbb{C} \setminus A,$$

wobei A eine endliche Menge ist, die die Nullstellenmenge $q^{-1}(\{0\}) = \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}$ enthält. Sei nun $p \neq 0$ vorausgesetzt. Man kürzt die gemeinsamen nicht konstanten Teiler von p und q heraus und erhält so die **gekürzte Darstellung** von

$$R = \frac{P}{Q},$$

wobei P und Q teilerfremd sind. Man nennt $D_R := Q^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ den **vollständigen Definitionsbereich** von R. Offenbar ist $D_R \supset q^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \supset \mathbb{C} \setminus A$.

Wie erhält man die gekürzte Darstellung? Sei zunächst der Zählergrad n größer oder gleich dem Nennergrad m. Dann liefert die Polynomdivision (16) die Darstellung

(25) $R = g + \frac{r}{q}$,

mit dem **ganzen Anteil** (d.i. der Polynomanteil) g vom Grad $n - m$ und dem **Restpolynom** r vom Grad $< m$, wobei $r = 0$ nicht ausgeschlossen ist.

(26) Lemma. *Es gelte (25). Dann folgt:*

$$d \text{ gemeinsamer Teiler von } p \text{ und } q \iff d \text{ gemeinsamer Teiler von } r \text{ und } q.$$

Beweis. "$\Longrightarrow$": $p = dp_0$, $q = dq_0 \Longrightarrow r = p - hq = dp_0 - hdq_0 = d(p_0 - hq_0)$, d.h. d ist Teiler von r. — "$\Longleftarrow$": $q = dq_0$, $r = dr_0 \Longrightarrow p = qh + r = dq_0h + dr_0 = d(q_0 + hr_0)$, d.h. d ist Teiler von p. □

(27) Euklidscher Algorithmus. Die Aufgabe ist, den (bis auf einen konstanten Faktor $\neq 0$ eindeutig bestimmten) gemeinsamen Teiler maximalen Grads von p und q zu ermitteln. Falls $r = 0$, dann ist offenbar q selbst dieser Teiler. Anderenfalls wiederholt man die Polynomdivision für

$$\frac{q}{r}$$

mit echt kleinerem Grad des Nenners, d.h. grad $r < m$. Nach endlich vielen Schritten ist der Rest $\tilde{r}$ erstmals vom Grad < 1, d.h. $\tilde{r}$ ist konstant. Falls $\tilde{r} = 0$, dann wurde im letzten Schritt nach (26) durch den gesuchten Teiler geteilt. Falls $\tilde{r} =$ konstant $\neq 0$, dann gibt es keine gemeinsamen Teiler außer den Konstanten, die immer Teiler sind. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Ermittle den gemeinsamen Teiler maximalen Grads und die gekürzte Darstellung zu

$$R(z) = \frac{z^3 - 2z^2 - z + 2}{3z^4 - 9z^3 + 7z^2 - 3z + 2}.$$

(28) Definition. Die Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt **k-facher Pol** der rationalen Funktion R, wenn für eine Darstellung

$$R = \frac{p}{q}$$

von R gilt, dass α keine Nullstelle von p und k-fache Nullstelle von q ist. M.a.W. hat R die Darstellung

$$R = \frac{p}{(z - \alpha)^k h} \tag{4.3}$$

mit einem $h \in \mathbb{C}[X]$, wofür $h(\alpha) \neq 0$.

Partialbruchzerlegung (PBZ)

(29) Lemma. ***Abspaltung des Hauptteils.*** *Ist α ein k-facher Pol von R, dann existiert genau eine Zerlegung*

$$R = H + R_1$$

derart, dass

$$H(z) = \frac{\lambda_1}{z-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(z-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\lambda_k}{(z-\alpha)^k}$$

mit eindeutig bestimmten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \neq 0$ und einer rationalen Funktion R_1 ohne Pol in α. Man nennt H den ***Hauptteil von R im Punkt α****.*

Beweis. Für h aus (4.3) gilt

$$\frac{p(z)}{h(z)} - \frac{p(\alpha)}{h(\alpha)} = \frac{p(z)h(\alpha) - p(\alpha)h(z)}{h(z)h(\alpha)} = \frac{(z-\alpha)s(z)}{h(z)}$$

mit einem $s \in \mathbb{C}[X]$. Dabei gilt die letzte Gleichheit, da α Nullstelle des Zählerpolynoms und $h(\alpha)$ eine Zahl $\neq 0$ ist. Damit folgt

$$R(z) \overset{(4.3)}{=} \frac{p(z)}{(z-\alpha)^k h(z)} = \frac{\lambda_k}{(z-\alpha)^k} + \frac{s(z)}{(z-\alpha)^{k-1}h(z)}.$$

Dabei ist $\lambda_k := \frac{p(\alpha)}{h(\alpha)} \neq 0$, weil $p(\alpha) \neq 0$. Offenbar hat $\tilde{R} := \frac{s}{(z-\alpha)^{k-1}h}$ in α höchstens einen $(k-1)$-fachen Pol. Man wendet nun den vorangegangenen Schritt auf $\tilde{R}$ an Stelle von R an. Die Existenz der Zerlegung folgt dann nach endlich vielen Schritten. — Wir wenden uns nun der Eindeutigkeit zu. Sei dazu

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{(z-\alpha)^j} + R_1(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\mu_j}{(z-\alpha)^j} + S_1(z).^1$$

Multipliziert man die Gleichung mit $(z-\alpha)^k$ und setzt anschließend $z = \alpha$ so folgt $\lambda_k = \mu_k$. Nun läßt sich $\frac{\lambda_k}{(z-\alpha)^k}$ auf beiden Seiten entfernen. Es folgt analog $\lambda_{k-1} = \mu_{k-1}$, u.s.w. □

Aus dem Beweis von (29) folgt, dass $R_1 = p_1/h$ mit einem gewissen Polynom p_1. Somit gilt

$$q = (X - \alpha_1)^{k_1} q_1$$

gemäß (4.3) mit $\alpha_1 := \alpha$, $k_1 := k$, $q_1 := h$. Wende nun (4.3) und (29) auf $R_1 = p_1/q_1$ an, usw.

Die PBZ von R erfolgt nun so:

(1) Ermittle den ganzen Anteil g durch Polynomdivision.

(2) Ermittle die gekürzte Darstellung der verbleibenden rationalen Funktion mittels des Euklidschen Algorithmus. Man erhält

$$R = h + \frac{p}{q} \quad \text{mit teilerfremden} \quad p,\, q.$$

[1] λ Lambda, μ Mü

(3) Faktorisiere $q = (X - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_r)^{k_r}$. Dabei sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die verschiedenen Nullstellen von q mit den Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$.

(4) Mache den Ansatz für die Hauptteile $H_1, H_2, \ldots, H_r$ zu den Polen von R. Das bedeutet, dass die Koeffizienten λ_{ij} mit $j = 1, \ldots, k_i$ für $i = 1, \ldots, r$ noch unbestimmt sind. Wie bewiesen, gilt nun

(30) Satz. ***PBZ.*** $R = g + H_1 + H_2 + \ldots + H_r$. *Diese Darstellung ist eindeutig.*

(5) Mittels der Polynomidentität

$$qR = qg + qH_1 + \ldots + qH_r$$

erhält man die Koeffizienten der Hauptteile durch Koeffizientenvergleich und/oder durch Einsetzen bestimmter Argumente, wie den Nullstellen von q.

5 Folgen

(1) Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)$ in $\mathbb{K}$ heißt **konvergent**, wenn ein $a \in \mathbb{K}$ existiert derart, dass

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon.$$

Man nennt a **Grenzwert** oder **Limes** von (a_n) und sagt, dass (a_n) **gegen** a **konvergiert**. Man schreibt

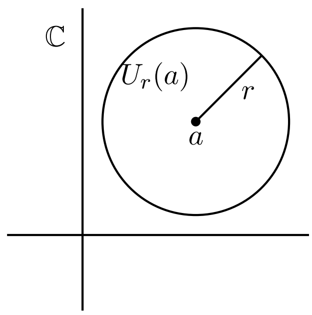
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Ist $a = 0$, dann heißt (a_n) eine **Nullfolge**. Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) **divergent**.

(2) Lemma. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

Beweis. Es gelte $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a'$. Angenommen es ist $a \neq a'$. Dann gilt nach Definition der Konvergenz für $\epsilon := \frac{1}{2}|a - a'| > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon\ \forall n > N$ und $\exists N' \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a'| < \epsilon\ \forall n > N'$. Wähle $n > \max\{N, N'\}$. Dann folgt der Widerspruch $|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |a - a'|$. □

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dann heißt $U_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ die **offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt** a **und Radius** r.



Es gilt offenbar: $\quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \iff \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N : \quad a_n \in U_\epsilon(a)$

(3) Satz. ***Elementare Grenzwerte.***

1. $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$: $\frac{1}{n^s} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. $a \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt[n]{a} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

4. $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$: $z^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, $k \in \mathbb{N}$: $\frac{n^k}{z^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis. 1. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \epsilon^{-\frac{1}{s}}$. Dann gilt für alle $n > N$: $\left|\frac{1}{n^s} - 0\right| = \frac{1}{n^s} < \frac{1}{N^s} \leq \epsilon$.

2. Sei zunächst $a \geq 1$. Setze $a_n := \sqrt[n]{a} - 1$. Dann gilt: $a = (1 + a_n)^n \overset{(1.4)}{\geq} 1 + na_n \geq na_n \Longrightarrow a_n \leq \frac{a}{n}$. — Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{a}{\epsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq N$: $|\sqrt[n]{a} - 1| = a_n \leq \frac{a}{n} < \frac{a}{N} \leq \epsilon$. — Sei jetzt $a < 1$. Dann gilt $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, wie gerade gezeigt wurde. Weil $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ folgt mit der Rechenregel (4)(c) (s.u.) daraus die Behauptung.

3. Es ist $a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, weil $\sqrt[n]{1} = 1 \geq 1$. Sei $n \geq 2$. Dann gilt $n = (1 + a_n)^n \overset{(1.16)}{\geq} 1 + \binom{n}{1}a_n + \binom{n}{2}a_n^2 \geq 1 + \binom{n}{2}a_n^2 \Longrightarrow n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2 \Longrightarrow 1 \geq \frac{1}{2}na_n^2 \Longrightarrow a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$. — Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{2}{\epsilon^2}$. Dann gilt für alle $n > N$: $|\sqrt[n]{n} - 1| = a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} < \sqrt{\frac{2}{N}} \leq \epsilon$.

4. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach (2.1)(b) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z|^N < \epsilon$. Dann gilt für alle $n > N$: $|z^n - 0| = |z^n| = |z|^n = |z|^N \underbrace{|z|^{n-N}}_{<1} < |z|^N < \epsilon$.

5. Es ist $\left|\frac{n^k}{z^n} - 0\right| = \frac{n^k}{|z|^n} = \left(\frac{n}{q^n}\right)^k$ mit $q := |z|^{\frac{1}{k}} > 1$, weil $|z| > 1$. Setze $a := q - 1 > 0$ und sei $n \geq 2$. Dann gilt $q^n = (1 + a)^n \overset{(1.16)}{\geq} \frac{1}{2}n(n-1)a^2$ und somit $\left(\frac{n}{q^n}\right)^k \leq \left(\frac{2}{(n-1)a^2}\right)^k$. — Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 1 + \frac{2}{a^2}\epsilon^{-\frac{1}{k}}$. Dann gilt für alle $n > N$: $\left(\frac{n}{q^n}\right)^k < \left(\frac{2}{(N-1)a^2}\right)^k \leq \epsilon$.

□

(4) Rechenregeln für Folgen in $\mathbb{C}$. *Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann folgt:*

(a) $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

(b) $a_n b_n \longrightarrow ab$.

(c) *Sei $b \neq 0$. Dann ist $b_n \neq 0$ bis auf endlich viele n und $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.*

(d) $|a_n| \longrightarrow |a|$, $\overline{a_n} \longrightarrow \overline{a}$, $\operatorname{Re} a_n \longrightarrow \operatorname{Re} a$ *und* $\operatorname{Im} a_n \longrightarrow \operatorname{Im} a$. *Insbesondere gilt:* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n$.

(e) *Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n$ bis auf endlich viele n. Dann gilt $a \leq b$.*

Beweis. (a) Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existieren $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n > N$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n > M$. Daraus folgt $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ $\forall n > \max\{N, M\}$.

(b) Es ist $a_nb_n - ab = a_nb_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b) = (a_n - a)(b_n - b + b) + a(b_n - b) = (a_n - a)(b_n - b) + (a_n - a)b + a(b_n - b)$. Daraus folgt $|a_nb_n - ab| \leq |a_n - a||b_n - b| + |a_n - a||b| + |a||b_n - b|$. — Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existieren $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon/3}{1+|b|}$ $\forall n > N$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \min\left\{1, \frac{\epsilon/3}{1+|a|}\right\}$ $\forall n > M$. Dann gilt für alle $n > \max\{N, M\}$: $|a_nb_n - ab| < \frac{\epsilon}{3} \cdot 1 + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.

(c) Zu $\epsilon := \frac{1}{2}|b| > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$ $\forall n > N$. Hieraus folgt $|b| - |b_n| \leq ||b| - |b_n|| \overset{(2.3)(iv)}{\leq} |b - b_n| < \frac{1}{2}|b|$ und somit $|b_n| > \frac{1}{2}|b|$ $\forall n > N$. Insbesondere ist $b_n \neq 0$ $\forall n > N$. Weiter gilt $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b_n||b|} < \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|$ $\forall n > N$. — Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < \frac{|b|^2}{2}\epsilon$ $\forall n > M$. Dann gilt für alle $n > \max\{N, M\}$: $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\epsilon = \epsilon$. Daraus folgt $\frac{1}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b}$. Mit Teil (b) folgt schließlich $\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$.

(d) Nach (2.3) ist $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$. Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ $\forall n > N$. Dann gilt für alle $n > N$: $||a_n| - |a|| < \epsilon$. Das bedeutet $|a_n| \longrightarrow |a|$.
Da $|\overline{a_n} - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a|$, folgt $\overline{a_n} \to \overline{a}$ wie eben. Mit (a) und (d) folgen $\operatorname{Re} a_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\overline{a_n} \to \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\overline{a} = \operatorname{Re} a$ und analog $\operatorname{Im} a_n \longrightarrow \operatorname{Im} a$.

(e) Angenommen es sei $a > b$. Dann existiert zu $\epsilon := \frac{1}{2}(a - b)$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a - a_n < \epsilon$ und $b_n - b < \epsilon$ für alle $n > N$. Hieraus folgt der Widerspruch $a_n > \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b > b_n$ $\forall n > N$.

□

Bemerkungen. 1. Nach (e) bleibt die Relation $\leq$ beim Grenzübergang erhalten. Nicht so $<$. Beispielsweise gilt für $a_n := 0$, $b_n := \frac{1}{n}$, dass $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, aber $\lim\ a_n = \lim\ b_n (= 0)$.

2. Aus (4)(d) und (4)(a) folgt: $(a_n)_n$ konvergent $\Longleftrightarrow$ $(\operatorname{Re}\ a_n)_n$ **und** $(\operatorname{Im}\ a_n)_n$ konvergent.

(5) Einschließungsregel. Sei $B_n \leq a_n \leq C_n$ bis auf endlich viele n, und es existiere und sei

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

Dann konvergiert auch (a_n) mit $\lim\ a_n = \lim\ B_n$.

Beweis. Sei $A := \lim\ B_n$. Offensichtlich gilt $|a_n - A| \leq |B_n - A| + |C_n - A|$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|B_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$, $|A_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n > N$. Damit folgt die Behauptung. □

(6) Definition. (a_n) und (b_n) heißen **asymptotisch gleich**, wenn $b_n \neq 0$ bis auf endlich viele n und

$$a_n/b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Man schreibt: $a_n \simeq b_n$ für $n \to \infty$. Asymptotische gleiche Folgen konvergieren beide oder divergieren beide. Beispielsweise gilt für $a_n := n^2$, $b_n := n^2 + n$: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$. Beachte, dass $(b_n - a_n)_n = (n)_n$ divergent ist.

(7) Definition.

- Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $|a| \leq c \ \forall a \in A$.

  Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach **oben (unten) beschränkt**, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $a \leq c$ $(a \geq c)$ $\forall a \in A$.

- Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, d.h. wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass $|a_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$.

- Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt nach **oben (unten) beschränkt**, wenn $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist, d.h. wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass $a_n \leq c$ $(a_n \geq c)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist beschränkt. — $U_r(a)$ ist beschränkt für jedes $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$.

(8) Lemma. *Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann gelten:*

(a) *(a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) beschränkt.*

(b) *(a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt $\Longrightarrow$ $(a_n b_n)$ Nullfolge.*

Beweis. (a) Es gelte $a_n \to a$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \ \forall n > N$. Daher ist $|a_n| \leq 1 + |a| \ \forall n > N$. Es folgt, dass $|a_n| \leq \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $c \in \mathbb{R}_+$ mit $|b_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| < \frac{\epsilon}{c} \ \forall n > N$. Hieraus folgt, dass $|a_n b_n - 0| \leq |a_n| c < \frac{\epsilon}{c} c = \epsilon \ \forall n > N$.

$\square$

Die Umkehrung von (a) gilt nicht. Betrachte beispielsweise $(a_n) = ((-1)^n)$.

(9) Definition. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend (fallend)**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(10) Satz. *Sei (a_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt und monoton. Dann ist (a_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) wachsend und $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) fallend.*

Beweis. Sei (a_n) wachsend, $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $s - \epsilon < a_N$. Daraus folgt für alle $n > N$: $s - \epsilon < a_N \leq a_n \leq s$. Also gilt $|a_n - s| < \epsilon \ \forall n > N$. D.h. $a_n \to s$. — Ist (a_n) fallend, dann ist $(-a_n)$ wachsend und somit $-a_n \to \sup\{-a_m : m \in \mathbb{N}\} = -\inf\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$. $\square$

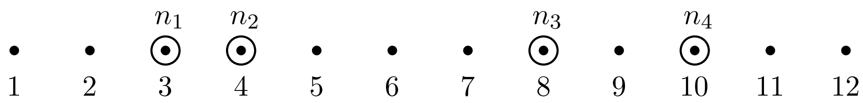
$\boxed{\text{Üb}}$ Seien a, $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

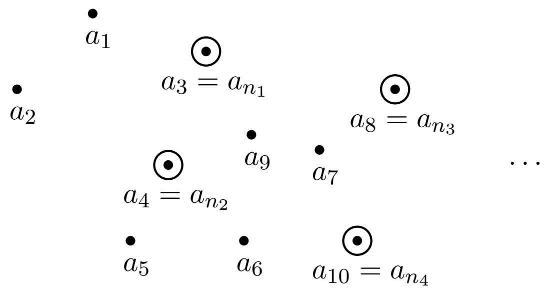
für $n \in \mathbb{N}_0$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

(11) Definition. Sei X eine Menge, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die Folge $(n)_n$ und die Teilfolge $(n_k)_k$:



Die Folge $(a_n)_n$ und die Teilfolge $(a_{n_k})_k$:



Beispiel. Sei $(a_n)_n := (n^2)_n$, d.i. die Folge $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$ Sei $(n_k)_k := (2k)_k$. Die zugehörige Teilfolge $(a_{n_k})_k$ ist $4, 16, 36, 64, 100, \ldots$

Bemerkungen. 1. Jede Folge ist Teilfolge von sich selbst. Setze dazu $n_k := k$.

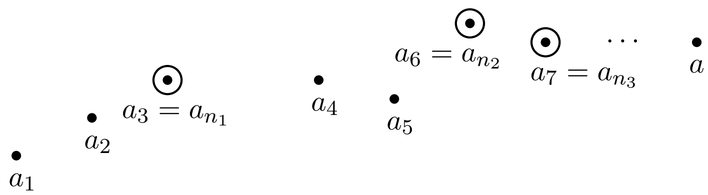
2. Es gilt $k \leq n_k \ \forall k \in \mathbb{N}$.

   Beweis. Da $1 \leq n_1$, gilt die Behauptung für $k = 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung $k \leq n_k$ folgt $k + 1 \leq n_k + 1 \leq n_{k+1}$, da $(n_k)_k$ streng monoton wachsend ist. □

3. Eine Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ von einer Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist auch eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(12) Satz. *Sei (a_n) in $\mathbb{C}$ konvergent und (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n). Dann ist auch (a_{n_k}) konvergent und $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.*

Beweis. Setze $a := \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon \ \forall n < N$. Nach obiger Bemerkung ist $n_k > N \ \forall k > N$. Daher ist $|a_{n_k} - a| < \epsilon \ \forall k > N$.



□

(13) Satz. *Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gibt es eine monotone Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n).*

Beweis. Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : a_k \leq a_n \text{ für alle } k \geq n\}$. Es ist die Menge derjenigen Indizes n, von wo an die Folge keinen größeren Wert mehr annimmt.

1. Fall: M ist endlich. Sei $m := \max M$ bzw. $m = 0$, falls $M = \emptyset$. Definiere (n_k) induktiv. Setze $n_1 := m + 1$. Seien $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ für $k \geq 1$ bereits definiert. Weil $n_k \notin M$, existiert ein $l \in \mathbb{N}$ derart, dass $l > n_k$ und $a_{n_k} < a_l$ ist. Setze $n_{k+1} := l$. Offensichtlich ist (a_{n_k}) streng monoton wachsend.

2. Fall: M ist unendlich. Definiere nun (n_k) induktiv folgendermaßen. Wähle $n_1 := \min M$. Dann ist $n_1 \in M$. Seien $n_1 < \ldots < n_k$ mit $n_1, \ldots, n_k \in M$ bereits definiert. Weil M unendlich ist, existiert $l \in M$ mit $l > n_k$. Setze $n_{k+1} := l$. Nach Definition von M folgt $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$. Also ist (a_{n_k}) monoton fallend. □

(14) Satz von Bolzano-Weierstraß. Sei (a_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt. Dann gibt es eine konvergente monotone Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n).

Beweis. Nach (13) gibt es eine monotone Teilfolge (a_{n_k}). Da (a_n) beschränkt ist, ist auch (a_{n_k}) beschränkt. Nach (10) ist (a_{n_k}) daher konvergent. □

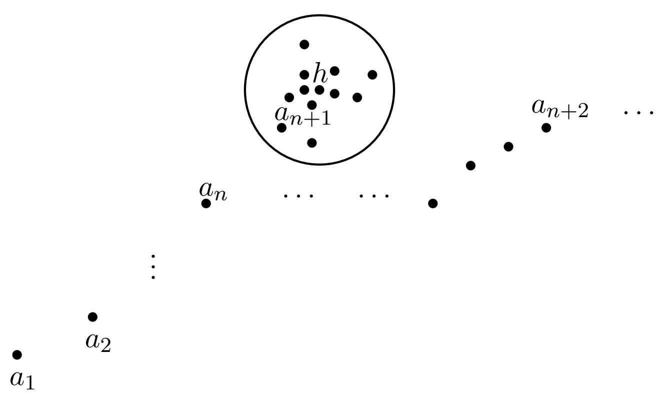
(15) Korollar. *Ist (a_n) in $\mathbb{C}$ beschränkt, dann gibt es eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}).*

Beweis. Offenbar sind die Folgen $(\alpha_n) := (\mathrm{Re}\, a_n)$ und $(\beta_n) := \mathrm{Im}\, a_n$ beschränkt. Nach (14) gibt es eine konvergente Teilfolge (α_{n_k}). Außerdem ist (β_{n_k}) beschränkt, da (β_n) beschränkt ist. Wieder nach (14) gibt es eine konvergente Teilfolge $(\beta_{n_{k_l}})_l$ von (β_{n_k}). Setze

$$c_l := \alpha_{n_{k_l}} + i\beta_{n_{k_l}} = a_{n_{k_l}}.$$

Nach (12), Bemerkung 2 nach (4) und Bemerkung 3 nach (11) ist (c_l) eine konvergente Teilfolge von (a_n). □

(16) Definition. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{C}$. Dann heißt h ein **Häufungspunkt** von (a_n), wenn jede ϵ-Umgebung $U_\epsilon(h)$ von h unendlich viele Folgenglieder a_n enthält, d.h. wenn gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ ist $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - h| < \epsilon\}$ unendlich.



Beispiele. • Ist (a_n) konvergent, dann ist $\lim a_n$ ein Häufungspunkt von (a_n). Er ist sogar der einzige Häufungspunkt von (a_n).

- $(a_n) = (i^n)$ hat genau die Häufungspunkte $1, i, -1, -i$. Beachte, dass hier $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich ist.
- $(a_n) = (n)$ hat keinen Häufungspunkt.
- Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ surjektiv (ein solches f existiert, weil $\mathbb{Q}$ abzählbar ist) und setze $a_n := f(n)$. Dann hat (a_n) jede reelle Zahl als Häufungspunkt.

$\boxed{\text{Üb}}$ Man beweise die Aussage des letzten Beispiels. Hinweis: Jedes Intervall enthält unendlich viele rationale Zahlen.

$\boxed{\text{Üb}}$ Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ derart, dass $W := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich ist. Dann existiert ein Häufungspunkt h von (a_n) mit $h \in W$ und jeder Häufungspunkt von (a_n) liegt in W.

(17) Lemma. *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *h ist Häufungspunkt von (a_n).*

(ii) *Es gibt eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = h$.*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Definiere (n_k) induktiv. Für $k = 1$ sei $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in U_1(h)$. Seien $n_1, n_2, \ldots, n_k$ definiert mit $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ und $a_{n_i} \in U_{\frac{1}{i}}(h)$. Weil es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \in U_{\frac{1}{k+1}}(h)$, existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l > n_k$ und $a_l \in U_{\frac{1}{k+1}}(h)$. Setze $n_{k+1} := l$. — Zu zeigen ist $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $K \in \mathbb{N}$ mit $K \geq \frac{1}{\epsilon}$. Für jedes $k > K$ gilt dann $\frac{1}{k} < \frac{1}{K} \leq \epsilon$ und daher $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(h) \subset U_\epsilon(h)$, d.h. $|a_{n_k} - h| < \epsilon$.
(ii) $\implies$ (i): Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - h| < \epsilon \; \forall k > K$, d.h. $a_{n_k} \in U_\epsilon(h) \; \forall k > K$. Das sind unendlich viele Folgenglieder. □

(18) Korollar. *Sei (a_n) in $\mathbb{C}$ beschränkt. Dann besitzt (a_n) einen Häufungspunkt.*

(19) Definition. Sei (a_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt $h_* := \sup\limits_n \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ der **Limes inferior** und $h^* := \inf\limits_n \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ der **Limes superior** von (a_n) und wird mit $h_* := \liminf\limits_{n\to\infty} a_n =: \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ bzw. mit $h^* =: \limsup\limits_{n\to\infty} a_n =: \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet.

(20) Satz. *Sei (a_n) in $\mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$h_* = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}, \quad h^* = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}.$$

Es ist h_* der kleinste und h^* der größte Häufungspunkt von (a_n).

Beweis. Es ist $\inf\{a_k, a_{k+1}, \ldots\} =: c_k \in \mathbb{R}$, da (a_n) beschränkt ist. Weiter gilt für alle $k : c_k \leq c_{k+1} \leq a_{k+1} \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da (c_k) monoton wachsend und beschränkt ist, existiert und ist $h_* = \sup\limits_k c_k = \lim\limits_{k\to\infty} c_k$.

Zunächst wird gezeigt, dass h_* ein Häufungspunkt ist. Es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} < c_1+1$. Es folgt $a_{n_1} < c_{n_1} + 1$. Seien $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ bereits definiert mit $a_{n_k} < c_{n_k} + \frac{1}{k}$. Es existiert ein $l \in \mathbb{N}$, $l \geq n_k + 1$ mit $a_l < c_{n_k+1} + \frac{1}{k+1}$. Hierfür gilt $a_l < c_l + \frac{1}{k+1}$. Setze $n_{k+1} := l$. Damit ist

$$\underbrace{c_{n_k}}_{\to h_*} \leq a_{n_k} < \underbrace{c_{n_k} + \frac{1}{k}}_{\to h_*},$$

woraus $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h_*$ folgt. — Nun wird gezeigt, dass h_* der kleinste Häufungspunkt ist. Sei h ein Häufungspunkt. Dann existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h$. Wegen $\underbrace{c_{n_k}}_{\to h_*} \leq \underbrace{a_{n_k}}_{\to h}$ folgt $h_* \leq h$.

Die Behauptungen zu h^* folgen unmittelbar aus obigem wegen $h^* = -\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)$. $\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ Zu (20) beweise man $h^* = -\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

Cauchyfolgen

(21) Definition. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt **Cauchy Folge (CF)**, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, N \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N : \; |a_n - a_m| < \epsilon.$$

(22) Satz. *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt:*

$$(a_n) \text{ konvergent} \iff (a_n) \text{ ist CF.}$$

Beweis. "$\Longrightarrow$": Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \; \forall n > N$. Daraus folgt für alle $n, m > N : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

"$\Longleftarrow$": Man zeigt zunächst, dass (a_n) beschränkt ist. Zu $\epsilon = 1$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1 \; \forall n, m \geq N$. Dann gilt für alle $m > N : |a_m| = |a_m - a_N + a_N| \leq |a_m - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$. Daraus folgt für alle $n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_N|\}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (14) gibt es eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n). Sei $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Das folgende Lemma zeigt $a_n \to a$. $\square$

(23) Lemma. *Sei (a_n) eine CF in $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ und (a_{n_k}) eine Teilfolge mit $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. Dann gilt $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall k > K$. Außerdem gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n, m > N$. Dann gilt für alle $k > \max\{N, K\}$:

$$|a_k - a| \leq \underbrace{|a_k - a_{n_k}|}_{<\frac{\epsilon}{2},\text{ weil } k>N \text{ und } n_k \geq k > N} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{<\frac{\epsilon}{2},\text{ weil } k>K} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Insbesondere besitzt damit $\mathbb{R}$ die Eigenschaft (C) aus Kapitel 2.

Üb Setze für $\mathbb{R}$ statt dem Intervallschachtelungsprinzip (I) die Eigenschaft (C) voraus. Zeige dann: (C) $\Longrightarrow$ (I).

Damit ist die in Kapitel 2 angekündigte Äquivalenz von (I), (S) und (C) gezeigt. Jede dieser drei Eigenschaften ist eine gleichwertige Formulierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Uneigentliche Konvergenz

Die ideellen Elemente $-\infty$ und ∞ wurden bereits in Kapitel 2 eingeführt. Man nennt

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

die **erweiterte Zahlengerade**. Mit $a \in \mathbb{R}$ bezeichnet man $[a, \infty] := [a, \infty[\cup \{\infty\}$, $[-\infty, a] := \{-\infty\} \cup]-\infty, a]$, $[-\infty, \infty] =: \overline{\mathbb{R}}$, sowie $]a, \infty] :=]a, \infty[\cup \{\infty\}$, u.s.w.

(24) Definition. Für $M \subset \mathbb{R}$ sei $\sup M := \infty$, falls M nach oben unbeschränkt ist. Analog ist $\inf M := -\infty$ definiert.

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Man sagt, (a_n) **konvergiert uneigentlich** oder **divergiert bestimmt** gegen ∞ ($-\infty$), wenn

$$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N: \quad a_n > c\ (a_n < c)$$

und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(-\infty)$.

Damit sind der Limes inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und der Limes superior $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ auch für unbeschränkte reelle Folgen (a_n) wie in (19) definiert und es gelten die Formeln aus (20). Insbesondere bedeutet z.B. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, dass es für jedes $c \in \mathbb{R}$ unendlich viele n mit $a_n < c$ gibt.

Üb Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Man zeige:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty \Longleftrightarrow (a_n) \text{ konvergiert uneigentlich gegen } \infty.$$

Beispiele. • $a > 1$: $a^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$.

• $a < -1$: (a^n) ist divergent, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeige: (a_n) konvergent $\iff \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Aus letzterem folgt außerdem $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

6 Reihen

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$. Man bilde daraus eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1 \\ s_2 &:= a_1 + a_2 \\ s_3 &:= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &:= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \end{aligned}$$

(1) Definition. Zur Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ heißt $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ die n**-te Partialsumme** und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der **Partialsummen**. Statt (s_n) schreibt man auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

und nennt dies die **Reihe** zu (a_n). Die Folgenglieder a_n heißen die **Glieder der Reihe**. Man sagt, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergiert**, wenn (s_n) konvergiert. Gegebenenfalls heißt $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ die **Summe** oder der **Wert** der Reihe und man schreibt

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots .$$

Man beachte, dass damit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **zwei** Bedeutungen hat.

Falls (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ ist und (s_n) uneigentlich gegen $-\infty$ oder ∞ konvergiert, schreibt man $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ bzw. ∞.

Analog definiert man $\sum_{k=p}^{\infty} a_p + a_{p+1} + \ldots$ für $p \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist oftmals $p = 0$.

(2) Beispiele.

(a) Die **Geometrische Reihe**. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \ldots$ für $|z| < 1$ gegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Beweis. $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k \overset{(1.3)}{=} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-z}$ nach (5.3) 4. $\square$

(b) Die **Harmonische Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ divergiert bestimmt gegen ∞. D.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

Beweis. Zu zeigen ist: $\forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N:\ s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > c$. Dazu betrachte $n > 2^\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^{\nu-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}\right) + \underbrace{\frac{1}{2^\nu+1} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{weglassen}} \geq \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2^\nu} = \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{\nu\text{-mal}} = 1 + \frac{\nu}{2}.
\end{aligned}$$

Sei nun $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wähle $\nu \in \mathbb{N}$ mit $1 + \frac{\nu}{2} > c$ (d.h. $\nu > 2(c-1)$) und setze $N := 2^\nu$. Dann gilt für alle $n > N$: $s_n \geq 1 + \frac{\nu}{2} > c$. $\square$

(c) Es ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Beweis. Wegen $\frac{1}{k(k+1)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ gilt

$$\begin{aligned}
s_n &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{=\frac{1}{1\cdot 2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{=\frac{1}{2\cdot 3}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)}_{=\frac{1}{(n-1)n}} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{=\frac{1}{n(n+1)}} = \\
&\overset{(*)}{=} 1 - \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ wurde ausgenutzt, dass zuvor eine **Teleskopsumme** steht, bei der sich aufeinanderfolgende Glieder aufheben und nur das erste und letzte Glied stehen bleiben. $\square$

Bemerkung. Wie bei Folgen ist für die Konvergenz einer Reihe das "Verhalten am Anfang" unerheblich. Für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{k=p}^{\infty} a_k \text{ konvergiert.}$$

(3) Lemma. *Die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *sei konvergent gegen* s. *Dann gilt:*

(i) $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ *konvergiert gegen* $s - s_{m-1}$ *für* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

(ii) (a_n) *ist eine Nullfolge.*

Beweis. (i) ist klar. (ii) folgt aus $a_n = s_n - s_{n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s - s = 0.$ $\square$

Die Umkehrung von (ii) gilt nicht, wie man an der harmonischen Reihe sieht.

(4) Satz. ***Cauchy Kriterium***.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert } \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m > N : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon.$$

Beweis. Da $s_n - s_{m-1} = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$, folgt die Behauptung nach (5.22) für die Folge (s_n). $\square$

(5) Lemma. *Seien* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent und sei* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Dann konvergiert* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + \lambda b_k)$ *gegen* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis. Für die Partialsummen $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ und $t_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ gilt $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$ und $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$. Daher gilt $s_n + \lambda t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s + \lambda t$, woraus die Behauptung folgt, weil $s_n + \lambda t_n$ die n-te Partialsumme von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + \lambda b_k)$ ist. $\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ Wandle die periodischen Dezimalbrüche $0,01\overline{7}$ und $0,2\overline{621}$ in Brüche um.

(6) Lemma. *Sei* $a_n \geq 0 \; \forall \, n \geq p$. *Dann gelten:*

(i) $\sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k$ *konvergent* $\iff (s_n)$ *beschränkt.* (ii) $\sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k = \sup \left\{ \sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k : n \geq p \right\}$.

Insbesomdere ist $\sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k = \infty$, *wenn* $\sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k$ *nicht konvergiert.*

Beweis. (s_n) ist monoton wachsend. Damit folgen die Behauptungen aus (5.10). $\square$

(7) Definition. Absolute Konvergenz. Eine Reihe $\sum\limits_{k} a_k$ in $\mathbb{C}$ **konvergiert absolut**, wenn $\sum\limits_{k} |a_k|$ konvergiert, d.h. wenn $\sum\limits_{k} |a_k| < \infty$.

Beispiel. Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist für $|z| < 1$ wegen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |z^k| = \frac{1}{1-|z|}$ absolut konvergent.

(8) Satz. $\sum\limits_k a_k$ *absolut konvergent* $\Longrightarrow \sum\limits_k a_k$ *konvergent.*

Beweis. Es gilt $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=m}^{n} |a_k| \; \forall n \geq m$. Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m > N : \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon.$$

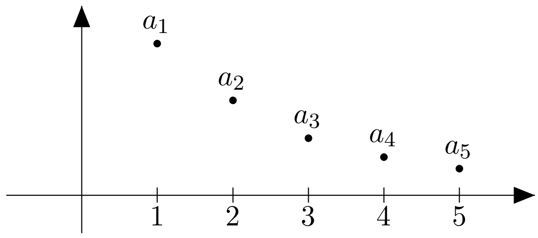
Mit dem Cauchy Kriterium (4) folgt daraus die Behauptung. □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt **nicht**. Ein Beispiel liefert die konvergente **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \quad \left(\overset{\text{später}}{=} \ln 2\right).$$

Die Konvergenz dieser Reihe folgt mit dem

(9) Satz. ***Leibniz Konvergenzkriterium.*** *Sei* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge in* $\mathbb{R}$.



Dann konvergiert die ***alternierende*** *Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

und es gilt die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Man hat daher eine (sehr gute) Kontrolle der Restsumme $s - s_n$, also der Konvergenzgeschwindigkeit.

Beweis. Sei $n > m$. Mit $k := n - m$ gilt dann

$$\begin{aligned} s_n - s_m &= (-1)^{m+1} (a_{m+1} - a_{m+2} + \ldots + (-1)^{k-1} a_{m+k}) = \\ &= (-1)^{m+1} \begin{cases} (a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots + (a_{m+k-1} - a_{m+k}) & \text{falls } k \text{ gerade} \\ (a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots + (a_{m+k-2} - a_{m+k-1}) + a_{m+k} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Da die Ausdrücke in den Kammern ≥ 0 sind, folgt in beiden Fällen:

$$|s_n - s_m| \overset{\text{umklammern}}{=} a_{m+1} - \underbrace{(a_{m+2} - a_{m+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{m+4} - a_{m+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{m+1} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daher sind die Voraussetzungen des Cauchykriteriums (4) erfüllt. Also existiert $s := \lim\limits_n s_n$ und es folgt mit den bekannten Rechenregeln $\lim\limits_n |s_n - s_m| = |s - s_m| \leq a_{m+1}$. ☐

(10) Definition. Sei $\sum\limits_k a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$. Eine Reihe $\sum\limits_k b_k$ in $\mathbb{R}$ mit $|a_k| \leq b_k \ \forall k$ heißt eine **Majorante** von $\sum\limits_k a_k$.

(11) Satz. *Majorantenkriterium*. *Sei $\sum\limits_k b_k$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_k a_k$. Dann ist $\sum\limits_k a_k$ absolut konvergent.*

Beweis. Es gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, woraus die Behauptung mit (6) folgt. ☐

(12) Satz. *Quotientenkriterium*. *Seien $\sum\limits_k a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ und $a_k \neq 0$ für alle $k \geq N$.*

(a) *Es gebe $q \in]0,1[$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k \geq N$. Dann konvergiert $\sum\limits_k a_k$ absolut.*

(b) *Es gebe $q \in]1,\infty[$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq q$ für alle $k \geq N$. Dann divergiert $\sum\limits_k a_k$.*

Beweis. (a) Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \ \forall k \geq N$ folgt $|a_k| \leq |a_{k-1}|q \leq |a_{k-2}|q^2 \leq \ldots \leq |a_N|q^{k-N} \ \forall k \geq N$. Weiter gilt $\sum\limits_{k=N}^{n} |a_N|q^{k-N} = |a_N| \sum\limits_{k=0}^{n-N} q^k \leq |a_N| \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = |a_N|\frac{1}{1-q} \ \forall n \geq N$. Daraus folgt die Behauptung mit dem Majorantenkriterium (11) und wegen (6) .

(b) Offenbar ist (a_n) keine Nullfolge. Daher gilt die Behauptung nach (3)(ii). ☐

(13) Umordnungssatz. Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ und $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, d.h. eine **Permutation**. Dann heißt

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)}$$

eine **Umordnung** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. *Für jede Umordnung gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{absolut konvergent} \implies \sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)} \quad \textit{absolut konvergent und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Es gilt: $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{\pi(j)}| \leq \sum\limits_{k=1}^{\max\{\pi(1),\ldots,\pi(n)\}} |a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < \infty$. Also ist die Umordnung absolut konvergent. Es bleibt die Gleichheit der Summen zu zeigen.

Sei $s := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach (3)(i) existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}$. Da π surjektiv ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \ldots, m\} \subset \{\pi(1), \ldots, \pi(N)\}$. Damit gilt für alle $n > N$:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{\pi(j)} - s\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{n} a_{\pi(j)} - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - s\right| \leq \underbrace{\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right|}_{\text{die verbleibenden } a_{\pi(j)} \text{ sind hier dabei}} + \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ .$$

□

Wir erinnern an die Definition des Produkts zweier Polynome im Anschluss an (4.15):

$$p\,q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{mit } c_k := \sum_{i+j=k} a_i b_j,\ k = 0, \ldots, n+m.$$

Wie wir sehen werden, ist dieses Produkt auf Potenzreihen übertragbar. Zugrunde liegt der

(14) Satz. *Cauchy Produkt.* *Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$. Setze*

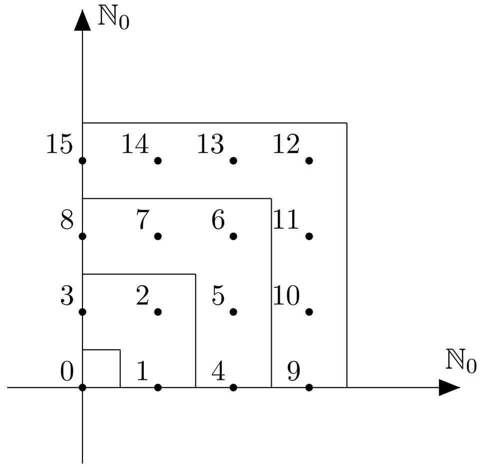
$$c_k := \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ ist absolut konvergent und

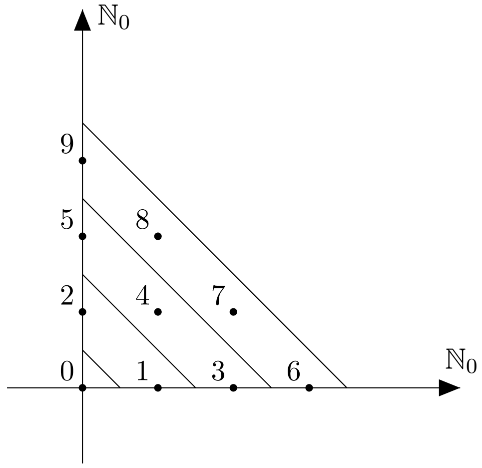
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)}_{=:a} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)}_{=:b}.$$

Beweis. Man betrachte die Abzählungen f, g von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, wie sie in den folgenden Zeichnungen angegeben sind.

(1) Die Bijektion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ hat die Eigenschaft, dass $\{(i,j) : 0 \leq i, j \leq n\} = \{f(0), f(1), \ldots, f(n(n+2))\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies folgt aus der Tatsache, dass die beiden Mengen jeweils gleich viele Elemente enthalten, nämlich $(n+1)^2$ bzw.$1 + n(n+2)$.



(2) Die Bijektion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ hat die Eigenschaft, dass $\{(i,j) : 0 \leq i+j \leq n\} = \{g(0), g(1), \ldots, g(\frac{1}{2}n(n+3))\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies folgt aus der Tatsache, dass die beiden Mengen jeweils gleich viele Elemente enthalten, nämlich $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ bzw. $1 + \frac{1}{2}n(n+3)$.



Zunächst ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{i(k)} b_{j(k)}$ mit $(i(k), j(k)) := f(k)$ absolut konvergent, denn für alle $n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{i(k)} b_{j(k)}| \leq \sum_{k=0}^{n(n+2)} |a_{i(k)}||b_{j(k)}| = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\right) \leq \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right)}_{<\infty} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right)}_{<\infty} < \infty.$$

Daraus folgt außerdem nach (8) und (5.12), dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{i(k)} b_{j(k)} = ab$. — Die Abzählung g geht aus f durch die Permutation $\pi := f^{-1} \circ g$ von $\mathbb{N}_0$ hervor, nämlich $g = f \circ \pi$. Daher gilt nach dem Umordnungssatz (13): $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{i(k)} b_{j(k)}$ mit $(i(k), j(k)) := g(k)$ konvergiert ebenfalls gegen ab.

Da $\sum\limits_{k=0}^{\frac{1}{2}n(n+3)} a_{i(k)} b_{j(k)} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$, folgt die Behauptung. □

(15) Korollar. *Ist h eine weitere Abzählung von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $h(k) = (i(k), j(k))$, dann gilt ebenfalls $\sum\limits_{k} a_{i(k)} b_{j(k)} = ab$.*

Anwendung: Exponentialfunktion

(16) Lemma. ***Exponentialreihe.*** *Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut.*

Beweis. Für $z \neq 0$ gilt: $\left|\frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}}\right| = |z| \frac{k!}{(k+1)!} = |z| \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall k \geq 2|z| - 1$. Mit dem Quotientenkriterium (12) folgt die Behauptung. □

(17) Exponentialfunktion und erste Eigenschaften. Die Exponentialfunktion lautet

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

und

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,718281828459045235\ldots$$

heißt die **Eulersche Zahl**. *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt:*

- $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$
- $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

Für reelle Argumente x folgt:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ *und* $\exp(x) > 1\ \forall x \in \mathbb{R}_+$
- $0 < \exp(x) < 1\ \forall x \in \mathbb{R}_-$
- $x \mapsto \exp(x)$ *ist streng monoton wachsend*
- $\exp(r) = e^r\ \forall r \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Es werden die weniger offensichtlichen Aussagen bewiesen.

- $z, w \in \mathbb{C}$: $\exp(z)\exp(w) = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) \overset{(14)}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \sum\limits_{i+j=k} \frac{z^i}{i!}\frac{w^j}{j!} =$ $\frac{1}{k!}\sum\limits_{j=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{(k-j)!j!}}_{=\binom{k}{j}} z^{k-j}w^j \overset{(1.16)}{=} \frac{1}{k!}(z+w)^k \Longrightarrow \exp(z)\exp(w) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z+w)^k = \exp(z+w)$.
- $1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z) \Longrightarrow \exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.
- $\exp(x) > 1$ für $x \in \mathbb{R}_+$ folgt sofort aus der Definition der Reihe. Da $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, folgt daraus $0 < \exp(x) < 1$ für $x \in \mathbb{R}_-$.
- $x_1 < x_2 \Longrightarrow \exp(x_2) = \exp(x_1 + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}) = \exp(x_1)\underbrace{\exp(x_2 - x_1)}_{>1} > \exp(x_1)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}) = \underbrace{\exp(1) \cdot \ldots \cdot \exp(1)}_{n} = \underbrace{e \cdot \ldots \cdot e}_{n} = e^n$. Damit folgt $\forall m \in \mathbb{N}$: $(\exp(\frac{n}{m}))^m = \underbrace{\exp\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \exp\left(\frac{n}{m}\right)}_{m} = \exp(\underbrace{\frac{n}{m} + \ldots + \frac{n}{m}}_{m}) = \exp(n) = e^n$.
  Nach (4.12) folgt daraus schließlich $\exp\left(\frac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{e^n} = e^{\frac{n}{m}}$.

$\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ **Binomailareihe zum Exponent** $s \in \mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$B_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n = 1 + sz + \frac{s(s-1)}{2} z^2 + \dots \ .$$

Zeige:

(1) $B_s(z)$ konvergiert für $|z| < 1$ absolut und divergiert für $|z| > 1$.

(2) $B_s(z)B_t(z) = B_{s+t}(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung. Es ist $B_s(x) = (1+x)^s\ \forall x \in \mathbb{R}$.

7 Stetige Funktionen

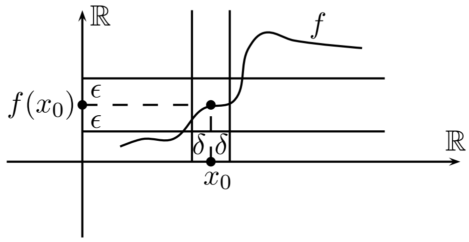
Im Folgenden sei wie bisher $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $D \subset \mathbb{K}$ und f eine Funktion mit Definitionsbereich D. Vgl. (4.1).

(1) Definition. Die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt stetig in $z_0 \in D$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; \forall z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta : \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Man nennt f stetig (in D), wenn f in jedem Punkt von D stetig ist. f heißt unstetig (in z_0), wenn f nicht stetig (in z_0) ist.

In der folgenden Skizze ist $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ findet man ein passendes $\delta > 0$ derart, dass $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\epsilon(f(x_0))$. Also ist f stetig in x_0.



Beispiele zur Stetigkeit

- *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto z^2$ ist stetig.*

  Beweis. $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |z + z_0||z - z_0| = |z - z_0 + 2z_0||z - z_0| \leq (|z - z_0| + 2|z_0|)|z - z_0|$. — Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle dazu $\delta := \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+2|z_0|}\right\}$. Damit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta : |f(z) - f(z_0)| < (1 + 2|z_0|)\frac{\epsilon}{1+2|z_0|} = \epsilon$. $\square$

- *$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \; f(x) := \sqrt{x}$ ist stetig.*

  Beweis. Es gilt $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$ für alle $a \geq 0$, $b \geq 0$. Denn ist o.E. $a > b$ und wäre $\sqrt{a} - \sqrt{b} > \sqrt{a - b}$, dann wäre $\sqrt{a} > \sqrt{a - b} + \sqrt{b}$ und somit $a > a - b + b = a$, was falsch ist. Also ist $|f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{|x - x_0|}$ für $x \geq 0$, $x_0 \geq 0$. — Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta := \epsilon^2$. Dann gilt für alle $x \geq 0$ mit $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \leq \sqrt{|x - x_0|} < \sqrt{\delta} = \epsilon$. $\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise für $k \in \mathbb{N}$ die Stetigkeit der Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \; f(x) := \sqrt[k]{x}$.

- *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$. Dann ist f unstetig in 0.*

  Beweis. Nehme das Gegenteil an. Dann existiert zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta > 0$ derart, dass $|f(x) - f(0)| < \epsilon = \frac{1}{2}$ ist für alle $|x| = |x - 0| < \delta$. Hieraus folgt für $x = \frac{\delta}{2}$ bzw. $x = \frac{-\delta}{2}$, dass $|f\left(-\frac{\delta}{2}\right) - f(0)| < \frac{1}{2}$, d.h. $|f(0)| < \frac{1}{2}$ bzw. $|f\left(\frac{\delta}{2}\right) - f(0)| < \frac{1}{2}$, d.h. $|1 - f(0)| < \frac{1}{2}$. Das ergibt den Widerspruch $1 = |1 - f(0) + f(0)| \le |1 - f(0)| + |f(0)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. □

- $f : D \to \mathbb{K}$ heißt **Lipschitz stetig** (auf D), wenn eine Konstante $L > 0$ existiert mit

  $$|f(z) - f(w)| \le L|z - w| \ \forall z, w \in D.$$

  Es gilt: *Jede Lipschitz stetige Funktion f ist stetig.*

  Beweis. Sei $z_0 \in D$ und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Setze $\delta := \frac{\epsilon}{L}$. Dann gilt für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$: $|f(z) - f(z_0)| \le L|z - z_0| < L\delta = \epsilon$. □

- *Für $a, b \in \mathbb{C}$ ist die affine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := az + b$, Lipschitz stetig*, denn $|f(z) - f(w)| = |az + b - (aw + b)| = |az - aw| = |a||z - w|$.

- *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := |z|$ ist Lipschitz stetig*, denn $|f(z) - f(w)| = ||z| - |w|| \le |z - w|$.

Es folgt ein sehr nützliches Stetigkeitskriterium.

(2) Satz. *Folgenkriterium.* *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist stetig in $z_0 \in D$ genau dann, wenn für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \longrightarrow z_0$ gilt:*

$$f(z_n) \longrightarrow f(z_0).$$

Beweis. (a) Sei f stetig in z_0 und (z_n) in D mit $z_n \to z_0$. Es ist $f(z_n) \to f(z_0)$ zu zeigen. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert $\delta > 0$ mit $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_0| < \delta \ \forall n > N$, weil $z_n \to z_0$. Damit gilt $|f(z_n) - f(z_0)| < \epsilon$ $\forall n > N$.

(b) Für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0$ gelte $f(z_n) \to f(z_0)$. Zu zeigen ist die Stetigkeit von f in z_0. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Angenommen es existiert kein $\delta > 0$ derart, dass $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$. Dann existiert zu $\delta := \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein z, genannt z_n, in D mit $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ derart, dass $|f(z_n) - f(z_0)| \ge \epsilon$. Aus $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ folgt $|z_n - z_0| \longrightarrow 0$, d.h. $z_n \longrightarrow z_0$. Aber $(f(z_n))$ konvergiert nicht gegen $f(z_0)$, was der Voraussetzung widerspricht. □

Die Voraussetzung an f im Beweisteil (b) von (2) nennt man die **Folgenstetigkeit** von f in z_0. Der Satz besagt also, dass für Funktionen die Stetigkeit und die Folgenstetigkeit äquivalent sind.

Rechenregeln zur Stetigkeit

(3) Satz. *$f, g : D \to \mathbb{K}$ stetig in $z_0 \in D \Longrightarrow f+g$ und fg stetig in z_0.*

Beweis. Es wird (2) angewendet. Sei (z_n) in D mit $z_n \to z_0$. Daraus folgt: $f(z_n) \to f(z_0)$ und $g(z_n) \to g(z_0) \Longrightarrow (f+g)(z_n) = f(z_n) + g(z_n) \overset{(5.4)(a)}{\longrightarrow} f(z_0) + g(z_0)$ und $(fg)(z_n) = f(z_n)g(z_n) \overset{(5.4)(b)}{\longrightarrow} f(z_0)g(z_0)$. $\square$

(4) Lemma. *$g : D \to \mathbb{K}$ stetig in $z_0 \in D \Longrightarrow \exists \delta > 0\ \forall z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta : |g(z)| \geq \frac{1}{2}|g(z_0)|$.*
.

Beweis. Wenn $g(z_0) = 0$ ist, kann $\delta > 0$ beliebig gewählt werden. Falls $g(z_0) \neq 0$, dann existiert zu $\epsilon = \frac{1}{2}|g(z_0)|$ ein $\delta > 0$ mit $|g(z) - g(z_0)| < \frac{1}{2}|g(z_0)|$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$. Damit ist $|g(z_0)| - |g(z)| \leq |g(z) - g(z_0)| < \frac{1}{2}|g(z_0)|$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

(5) Definition. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$. Dann heißt die Abbildung $f|_A : A \to Y$, $x \mapsto f(x)$, die **Einschränkung von f auf** A.

(6) Satz. *Seien $f, g : D \to \mathbb{K}$ stetig in $z_0 \in D$, $g(z_0) \neq 0$ und $V := \{z \in D : |z - z_0| < \delta\}$ mit δ aus (4). Dann ist $V \to \mathbb{K}$, $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ stetig in z_0, d.h. $\frac{f|_V}{g|_V}$ ist stetig in z_0.*

Beweis. Sei (z_n) in V mit $z_n \to z_0$. Dann gilt $\frac{f(z_n)}{g(z_n)} \overset{(5.4)(c)}{\longrightarrow} \frac{f(z_0)}{g(z_0)}$. $\square$

(7) Lemma. *Sei $f : D \to \mathbb{K}$, $A \subset D$ und $z_0 \in A$. Dann gilt: f stetig in $z_0 \Rightarrow f|_A$ stetig in z_0. Hiervon gilt auch die Umkehrung, wenn ein $r > 0$ existiert mit $U_r(z_0) \cap D \subset A$.*

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise (7). Finde ein Gegenbeispiel zu "$\Rightarrow$" in (7).

(8) Satz. *Seien $D, E \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{K}$, $g : E \to \mathbb{K}$, $f(D) \subset E$, f stetig in $z_0 \in D$ und g stetig in $f(z_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{K}$, $(g \circ f)(z) := g(f(z))$ stetig in z_0.*

(Vgl. (4.6) zur Komposition von Abbildungen. Hier besteht eine leichte Verallgemeinerung der Bezeichnung, da der Bildbereich von f nicht E ist, sondern eine Obermenge davon.)

Beweis. Es wird (2) angewendet. Sei (z_n) in D mit $z_n \to z_0$. Da f stetig in z_0 ist, gilt $f(z_n) \to f(z_0)$. Da $(f(z_n))$ in E mit $f(z_n) \to f(z_0)$ und g stetig in $f(z_0)$ ist, folgt $g(f(z_n)) \to g(f(z_0))$. $\square$

Es folgt etwas **Topologie** in $\mathbb{K}$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sei $U_r(x) :=]x - r, x + r[$.

(9) Definition. Sei $D \subset \mathbb{K}$. D heißt **offen** in $\mathbb{K}$, wenn

$$\forall z \in D \; \exists r > 0 \text{ mit } U_r(z) \subset D.$$

Weiter heißt D **abgeschlossen** in $\mathbb{K}$, wenn $\mathbb{K} \setminus D$ offen in $\mathbb{K}$ ist.

(10) Lemma. *Es gelten:*

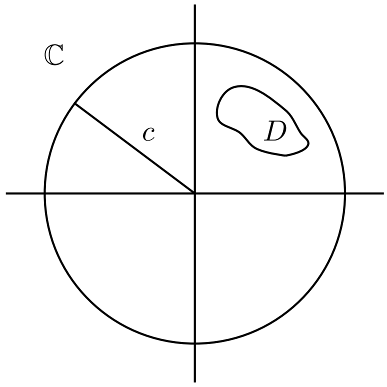
- $U_r(z)$ *für* $r > 0$ *und* $z \in \mathbb{K}$ *ist offen in* $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *ist abgeschlossen und nicht offen in* $\mathbb{C}$.
- $[a, b]$ *für* $-\infty < a < b < \infty$ *ist abgeschlossen in* $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{K}$ *ist offen und abgeschlossen in* $\mathbb{K}$.
- $\emptyset$ *ist offen und abgeschlossen in* $\mathbb{K}$.
- $D \subset \mathbb{C}$ *offen in* $\mathbb{C} \Longrightarrow D \cap \mathbb{R}$ *offen in* $\mathbb{R}$.
- $D \subset \mathbb{R}$ *abgeschlossen in* $\mathbb{R} \Longrightarrow D$ *abgeschlossen in* $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Üb}}$ *Beweise (10).*

(11) Satz. *Eine Teilmenge* $D \subset \mathbb{K}$ *ist abgeschlossen in* $\mathbb{K}$ *genau dann, wenn für jede konvergente Folge* (z_n) *in* $\mathbb{K}$, *wofür* $z_n \in D$ *für alle* n *ist, ihr Grenzwert* $\lim_n z_n$ *in* D *liegt.*

Beweis. Sei D abgeschlossen und (z_n) eine konvergente Folge mit $z_n \in D \; \forall n \in \mathbb{N}$. Angenommen $z := \lim z_n \notin D$. Dann existiert $r > 0$ mit $U_r(z) \subset \mathbb{K} \setminus D$, weil $\mathbb{K} \setminus D$ offen ist. Weil $z_n \in D$, folgt daraus $|z_n - z| \geq r \; \forall n$. Das widerspricht $z_n \to z$. — Zur Umkehrung wird gezeigt, dass $\mathbb{K} \setminus D$ offen ist. Sei $z \in \mathbb{K} \setminus D$. Angenommen $U_r(z) \not\subset \mathbb{K} \setminus D \; \forall r > 0$. Dann existiert zu $r = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein $z =: z_n \in U_{\frac{1}{n}}(z) \cap D$. Das bedeutet $|z_n - z| < \frac{1}{n} \; \forall n$ und somit $z_n \to z$, weshalb nach Voraussetzung $z \in D$, entgegen der Wahl von z. $\square$

(12) Definition und Satz. Gemäß Definition (5.7) ist $D \subset \mathbb{K}$ beschränkt, wenn $c \in \mathbb{R}_+$ existiert mit $|z| \leq c \; \forall z \in D$. $D \subset \mathbb{K}$ heißt **kompakt**, wenn D beschränkt und abgeschlossen ist.



Seien D kompakt und (z_n) eine Folge in D. Dann existiert eine konvergente Teilfolge (z_{n_k}). Es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} \in D$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß und (11). $\square$

(13) Satz. *Seien $D \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{K}$ stetig und injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $g : f(D) \to \mathbb{K}$, $g(f(z)) = z \ \forall z \in D$, stetig.*

Beweis. Sei $w_0 \in f(D)$ und (w_n) in $f(D)$ mit $w_n \to w_0$. Zu zeigen ist $g(w_n) \to g(w_0)$. Sei $z_n := g(w_n) \in D$ und $z_0 := g(w_0) \in D$. Angenommen (z_n) konvergiert nicht gegen z_0. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge (z_{n_k}) mit $|z_{n_k} - z_0| \geq \epsilon \ \forall k$. Da (z_{n_k}) in D und D kompakt ist, existiert eine in D konvergente Teilfolge $(z_{n_{k_l}})$. Ihr Grenzwert $\hat{z} \in D$ ist nach obigem verschieden von z_0. Da f injektiv und stetig ist, folgt $w_{n_{k_l}} = f(z_{n_{k_l}}) \to f(\hat{z})$. Andererseits gilt auch $w_{n_{k_l}} \to w_0$. Daher ist $f(\hat{z}) = w_0$ und somit $\hat{z} = g(f(\hat{z})) = g(w_0) = z_0$. Dies ergibt den Widerspruch. $\square$

(14) Folgerungen.

- Polynomfunktionen sind auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.
- Rationale Funktionen sind auf ihrem vollständigem Definitionsbereich stetig. Insbesondere sind die Stereographische Projektion $\sigma : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{i\}$ und die gebrochen linearen Transformationen stetig.
- $f : D \to \mathbb{R}$, $f(D) \subset [0, \infty[$ stetig $\Longrightarrow$ f^r stetig für $r \in \mathbb{Q}$.
- $f : D \to \mathbb{C}$ stetig $\Longrightarrow$ $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$ sind stetig.
- $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow$ $\sup\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\inf\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ sind stetig.
- Die Gauß-Klammer $[\ .\ ] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau an jeder ganzen Zahl unstetig.
- U.v.m.

$\boxed{\text{Üb}}$ Sei $D \subset \mathbb{K}$. Man zeige: $f : D \to \mathbb{K}$ stetig in $z_0 \in D \iff$ für jede Umgebung V von $f(z_0)$ ist $f^{-1}(V)$ Umgebung in D von z_0.

(Dabei heißt allgemein für $D \subset \mathbb{K}$ und $z_0 \in D$ die Menge $U \subset D$ eine **Umgebung** von z_0 in D, wenn ein $r > 0$ existiert mit $U \supset U_r(z_0) \cap D$.)

(15) Definition. Sei X eine Menge. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt (nach oben, nach unten) **beschränkt**, wenn $f(X) \subset \mathbb{R}$ (nach oben, nach unten) beschränkt ist. Vgl. Definition (5.7).

(16) Satz vom Maximum und Minimum. *Seien $D \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $u, v \in D$ mit $f(u) \leq f(z) \leq f(v)$ für alle $z \in D$.*

Beweis. Angenommen f ist nach oben unbeschränkt. Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists z_n \in D$ mit $f(z_n) \geq n$. Weil D kompakt ist, existiert (z_{n_k}) mit $\lim\limits_k z_{n_k} =: z_0 \in D$. Weil f stetig ist, gilt $f(z_{n_k}) \to f(z_0)$, was jedoch $f(z_{n_k}) \geq n_k\ \forall k$ widerspricht. Also ist $M := \sup\limits_{z \in D} f(z) < \infty$ gezeigt. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $z_n \in D$ mit $M - \frac{1}{n} \leq f(z_n) \leq M$. Es folgt $f(z_n) \to M$. Weil D kompakt ist, existiert (z_{n_k}) mit $z_{n_k} \to v \in D$. Somit ist $M = \lim\limits_k f(z_{n_k}) = f(v)$. — Analog oder durch Übergang zu $-f$ erfolgt der Beweis für das Minimum. $\square$

(17) Zwischenwertsatz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f([a, b]) = [m, M]$ mit Minimum m und Maximum M. Das bedeutet: $\forall \gamma \in [m, M]\ \exists c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.*

Beweis. Zunächst erfolgt folgende Reduktion:

O.E. sei $\gamma = 0$, sonst betrachte man $f - \gamma$ an Stelle von f.
O.E. sei $f(a) \neq 0$, sonst ist man fertig.
O.E. sei $f(a) < 0$, sonst betrachte man $-f$ anstelle von f.
O.E. sei $f(b) = M$, sonst verkleinere man das Intervall entsprechend nach (16).
O.E. sei $M > 0$, sonst ist $M = 0$ und man ist fertig.

Sei $G := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Da $a \in G \subset [a, b]$ existiert $x_0 := \sup G$. Wähle (x_n) in G mit $x_n \to x_0$. Dann ist $f(x_n) < 0\ \forall n$ und $f(x_n) \to f(x_0)$. Folglich ist $f(x_0) \leq 0$. Angenommen $f(x_0) < 0$. Dann ist $x_0 < b$. Zu $\epsilon := \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$ existiert $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $f(x) - f(x_0) < \epsilon = -\frac{1}{2} f(x_0)$, d.h. $f(x) < -\epsilon < 0$. Also ist $[a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset G$. Da $x_0 < b$ folgt $x_0 = \sup G > x_0$, was ein Widerspruch ist. Also ist $f(x_0) = 0$. $\square$

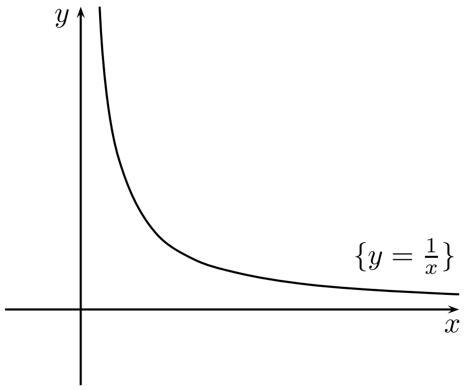
(18) Definition. Die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z, z' \in D \text{ mit } |z - z'| < \delta : \quad |f(z) - f(z')| < \epsilon.$$

(19) Lemma. *f gleichmäßig stetig $\Longrightarrow$ f stetig.*

Beweis. Sei $z_0 \in D$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert $\delta > 0$ derart, dass $|f(z) - f(z')| < \epsilon$ für alle $z, z' \in D$ mit $|z - z'| < \delta$. Wähle $z' = z_0$. Für $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt dann $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. $\square$

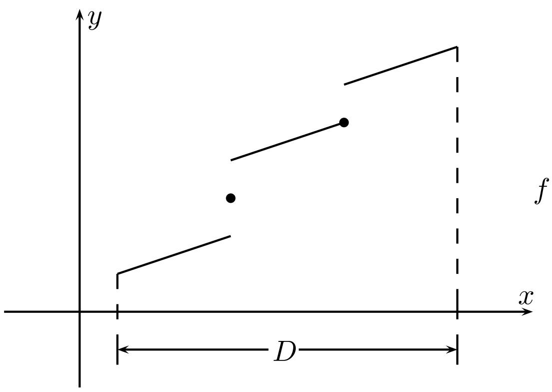
Die Umkehrung gilt i.A. nicht. *Beispielsweise ist* $f\ :]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ *nicht gleichmäßig stetig.* Zum Beweis seien $\epsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann gilt für $x = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}$ und $x' = 2x$: $|x - x'| = x < \delta$ und $|f(x) - f(x')| = \frac{1}{2x} \geq 1$.



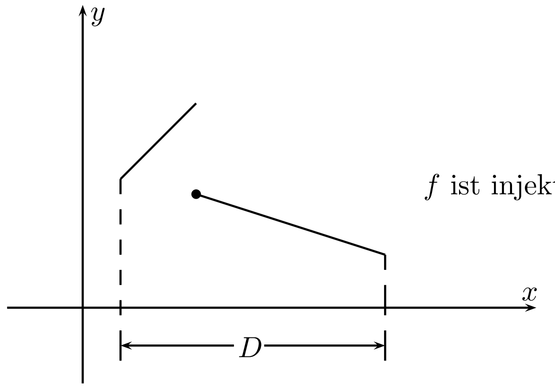
(20) Satz. *Seien D kompakt und $f : D \to \mathbb{K}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren $z_n, z'_n \in D$ derart, dass $|z_n - z'_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(z_n) - f(z'_n)| \geq \epsilon$. Nach (12) gibt es eine Teilfolge (z_{n_k}), die gegen ein $z_0 \in D$ konvergiert. Da $|z'_{n_k} - z_0| \leq |z'_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0| \to 0$, gilt auch $z'_{n_k} \longrightarrow z_0$. Daraus folgt $|f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})| \leq |f(z_{n_k}) - f(z_0)| + |f(z_0) - f(z'_{n_k}| \longrightarrow 0$ nach (2). Dies steht im Widerspruch zu $|f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})| \geq \epsilon\ \forall k$. $\square$

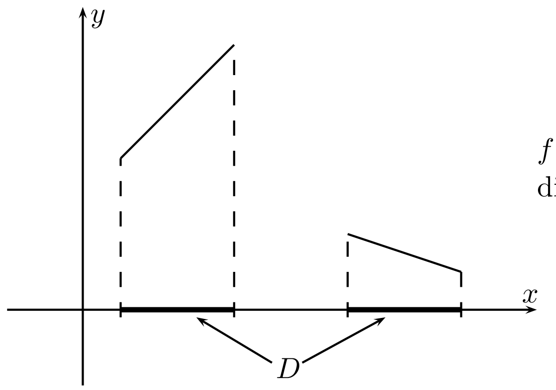
Für das Folgende werde zunächst an (4.9), (4.10) erinnert: Ist $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton, dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion ist ebenfalls streng monoton im gleichen Sinn.



f ist streng monoton und somit injektiv



f ist injektiv, aber nicht stetig und nicht monoton



f ist injektiv und stetig, aber nicht monoton, die Umkehrfunktion ist stetig nach (13)

(21) Satz. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *injektiv und stetig* $\Longrightarrow$ f *streng monoton.* Vgl. dazu f im letzten Bild.

Beweis. Es ist $f(a) \neq f(b)$, weil f injektiv ist. O.E. sei $f(a) < f(b)$, sonst betrachte man $-f$. Nach (16) existiert $a_1 \in [a, b]$ derart, dass $f(a_1)$ das Minimum vom f ist. Demnach ist $a_1 < b$, weil $f(a_1) \leq f(a) < f(b)$. Angenommen es wäre $a_1 > a$. Dann ist $f(a_1) \neq f(a)$, weil f injektiv ist, und daher ist $f(a) \in]f(a_1), f(b)[$. Nach dem ZWS (17) existiert $c \in]a_1, b[$ mit $f(c) = f(a)$. Da $a < a_1 < c$, ist $a \neq c$. Das widerspricht der Injektiviät von f. Also ist $a_1 = a$. — Ebenso folgt, dass $f(b)$ der maximale Wert von f ist. Somit gilt nach dem ZWS: $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Seien nun $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $a < x_1 < x_2 < b$. Betrachte $g := f|_{[a,x_2]}$. Da g stetig und injektiv ist, folgt aus dem eben Bewiesenem, dass $g([a, x_2]) = [g(a), g(x_2)]$, d.h. $f([a, x_2]) = [f(a), f(x_2)]$, weshalb $f(x_1) < f(x_2)$. □

Grenzwerte von Funktionen

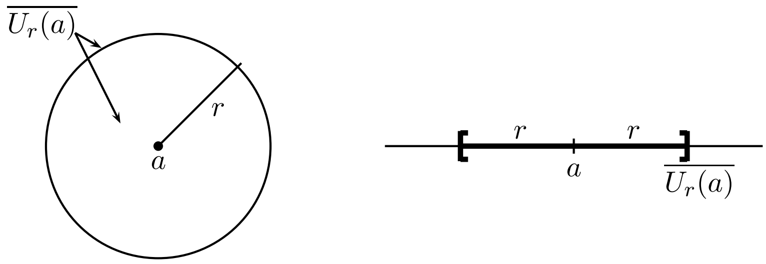
Es sei erinnert, dass $U_r(a) = \{z \in \mathbb{K} : |z - a| < r\}$ für $a \in \mathbb{K}$, $r > 0$ die r-Umgebung von a bezeichnet. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $U_r(a)$ das offene Intervall der Länge $2r$ mit Mittelpunkt a.

(22) Definition. Sei $D \subset \mathbb{K}$. Dann heißt $\overline{D} := \{z \in \mathbb{K} : U_r(z) \cap D \neq \emptyset \ \forall r > 0\}$ der **Abschluss von** D **in** $\mathbb{K}$.

Offenbar gelten

- $D \subset \overline{D}$

- $\overline{]a,b[} = [a,b]$
- $\overline{U_r(a)} = U_r(a) \cup \{z \in \mathbb{K} : |z-a| = r\}$. Das ist die abgeschlossene Kreisscheibe um a mit Radius r im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. das abgeschlossene Intervall mit Mittelpunkt a und Länge $2r$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.



- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

(23) Satz. $\overline{D} = \{a \in \mathbb{K} : \exists\,(a_n)$ *in* D *mit* $a_n \longrightarrow a\}$.

Beweis. Zu "$\subset$" sei $a \in \overline{D}$. Aus der Definition (22) folgt: $\forall n \in \mathbb{N}\,\exists\, a_n \in U_{\frac{1}{n}}(a) \cap D \Longrightarrow a_n \in D$ und $|a_n - a| < \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a_n \longrightarrow a$. — Zu "$\supset$" schließt man aus $a_n \to a$ mit $a_n \in D$: $\forall r > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < r \Longrightarrow a_n \in U_r(a) \cap D$. □

(24) Satz. *Der Abschluss* $\overline{D}$ *ist die kleinste abgeschlossene Menge, die* D *enthält. D.h.* $\overline{D}$ *ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge* A *mit* $D \subset A$ *folgt* $\overline{D} \subset A$.

Beweis.
- Sei A abgeschlossen mit $D \subset A$. Betrachte $b \in \mathbb{K}\backslash A$. Weil $\mathbb{K}\backslash A$ offen ist, existiert $r > 0$ mit $U_r(b) \subset \mathbb{K}\backslash A$. Hieraus folgt $D \cap U_r(b) = \emptyset$, weshalb $b \notin \overline{D}$. Also ist $\mathbb{K}\backslash A \subset \mathbb{K}\backslash\overline{D}$, d.h. $\overline{D} \subset A$.
- Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{K} \setminus \overline{D}$ offen ist. Sei $a \in \mathbb{K} \setminus \overline{D}$. Da $a \notin \overline{D}$, existiert $r > 0$ mit $U_r(a) \cap D = \emptyset$. Sei nun $b \in U_r(a)$. Weil $U_r(a)$ offen ist, existiert $r' > 0$ mit $U_{r'}(b) \subset U_r(a)$. Damit ist auch $U_{r'}(b) \cap D = \emptyset$, weshalb $b \notin \overline{D}$. Also folgt $U_r(a) \subset \mathbb{K} \setminus \overline{D}$.

□

(25) Korollar. $D \subset \mathbb{K}$ *abgeschlossen* $\Longleftrightarrow D = \overline{D}$.

(26) Definition. Grenzwert einer Funktion. Seien $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{K}$ und $a \in \overline{D}$. Dann heißt $w \in \mathbb{C}$ **Grenzwert von** f **in** a, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall z \in D \text{ mit } |z-a| < \delta :\ |f(z) - w| < \epsilon.$$

Offenbar ist w eindeutig, falls existent. Man schreibt:

$$w = \lim_{z \to a} f(z) \quad \text{oder auch} \quad f(z) \overset{z \to a}{\longrightarrow} w.$$

(27) Stetigkeit und stetige Fortsetzung. *Sei $f : D \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{D}$ und $w \in \mathbb{C}$. Definiere die Funktion $g : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ durch*

$$\begin{cases} g(z) := f(z) & \forall z \neq a \\ g(a) := w \end{cases}$$

Nach Definitionen (26), (1) *gilt:*

$$g \text{ stetig in } a \iff f(z) \overset{z\to a}{\longrightarrow} w.$$

Daraus ergeben sich zwei wichtige Aussagen.

(i) *Falls $a \in D$, dann gilt: f stetig in $a \iff f(z) \overset{z\to a}{\longrightarrow} f(a)$.*

(ii) *Falls $a \notin D$, dann gilt: f stetig fortsetzbar in $a \iff \lim\limits_{z\to a} f(z)$ existiert. Dabei definiert $f(a) := \lim\limits_{z\to a} f(z)$ die eindeutige stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{a\}$.*

(28) Korollar. *$w = \lim\limits_{z\to a} f(z) \iff$ für alle (z_n) in D mit $z_n \to a$ gilt $w = \lim\limits_n f(z_n)$.*

Beweis. Siehe (2). □

(29) Beispiel. Exponentialfunktion. Es gilt

(a) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

(b) $\lim\limits_{z\neq 0,\, z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1.$

(c) $\lim\limits_{z\neq z_0,\, z\to z_0} \frac{\exp(z)-\exp(z_0)}{z-z_0} = \exp(z_0).$

Beweis. Es gilt: $\frac{\exp(z)-\exp(z_0)}{z-z_0} = \exp(z_0)\frac{\exp(z-z_0)-1}{z-z_0}$. Damit folgt (c) aus (b). Außerdem folgt (a) aus (c), weil für $z \neq z_0$ gilt: $|\exp(z) - \exp(z_0)| = \left|\frac{\exp(z)-\exp(z_0)}{z-z_0}\right| |z - z_0| \overset{z\neq z_0,\, z\to z_0}{\longrightarrow} \exp(z_0) \cdot 0 = 0.$

Bleibt also (b) zu zeigen: $\exp(z) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 = z + z^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{k!} \implies \frac{\exp(z)-1}{z} - 1 = z \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{k!}$. Nun ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{k!}$ ist absolut konvergent mit $\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{k!}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{k-2}}{k!} = \frac{1}{2!}\left(1 + \frac{|z|}{3} + \frac{|z|^2}{3\cdot 4} + \dots\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|z|}{3} + \frac{|z|^2}{3^2} + \dots\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{|z|}{3}}$ für $|z| < 3$. Daher gilt: $\left|\frac{\exp(z)-1}{z} - 1\right| \leq \frac{3}{4}|z|$ für $|z| \leq 1$. Mit $z \to 0$ folgt die Behauptung. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeige: $\exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + R_{n+1}(z)$ mit $|R_{n+1}(z)| \leq \frac{n+2}{n+1}\frac{1}{(n+1)!}|z|^{n+1}$ für $|z| \leq 1$.

(30) Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion, der Logarithmus.

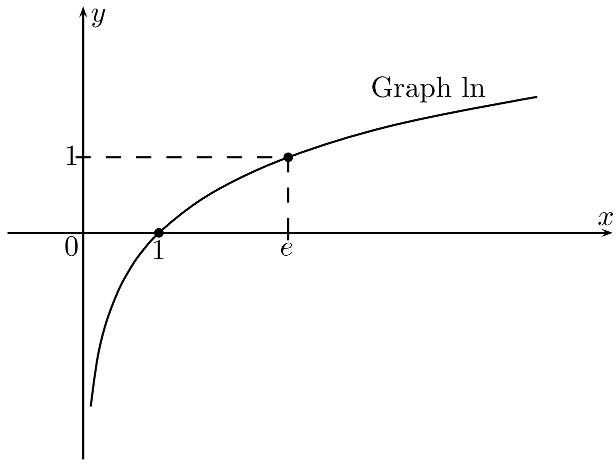
(i) $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$

(ii) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \exp(x)$ *ist eine streng monoton wachsende stetige Bijektion. Die Umkehrfunktion*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad \ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ist eine streng monoton wachsende stetige Bijektion. Sie heißt ***natürlicher Logarithmus*** *und hat die folgenden Eigenschaften:*

(iii) $\ln(1) = 0,\ \ln(e) = 1,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y,\ \ln(x^r) = r \ln x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+, \forall r \in \mathbb{Q}$.



Beweis. (i) Zu $y \in \mathbb{R}_+$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in [e^{-n}, e^n]$, weil gemäß der Reihe $e^n > 1 + n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und somit $e^{-n} = \frac{1}{e^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wegen des Zwischenwertsatzes existiert $x \in [-n, n]$ mit $\exp(x) = y$. Also ist $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

(ii) Wegen (6.17) letzter Punkt, (29)(a), (4.9) und (4.10) bleibt die Stetigkeit von ln zu zeigen. Sei $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Für $n \in \mathbb{N}$ groß genug ist $x_0 \in]e^{-n}, e^n[$. Da $\exp|_{[-n,n]}$ stetig ist, ist nach (13) auch die Umkehrabbildung $\ln|_{[e^{-n}, e^n]}$ stetig. Aus (7) folgt daher, dass ln stetig in x_0 ist.

(iii) Aus $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$ folgt $\ln 1 = 0$, $\ln e^1 = 1$. Weiter ist $\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y) = xy$, weshalb $\ln x + \ln y = \ln(xy)$. Daraus folgt insbesondere $0 = \ln 1 = \ln x \frac{1}{x} = \ln x + \ln \frac{1}{x}$, d.h. $\ln x^{-1} = -\ln x$. Außerdem gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$: $\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}) = \underbrace{\ln x + \ln x + \ldots + \ln x}_{n\text{-mal}} = n \ln x \Longrightarrow \ln(x^n) = \ln(\underbrace{x^{\frac{n}{m}} \cdot x^{\frac{n}{m}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{n}{m}}}_{m\text{-mal}}) = m \ln x^{\frac{n}{m}} \Longrightarrow n \ln x = m \ln x^{\frac{n}{m}} \Longrightarrow \frac{n}{m} \ln x = \ln x^{\frac{n}{m}}$. Insgesamt folgt also $\ln x^r = r \ln x$ $\forall r \in \mathbb{Q}$.

□

(31) Allgemeine Potenzfunktion. *Sei* $a \in \mathbb{R}_+$. *Die Potenzfunktion* (4.12) $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto a^r$, *läßt sich gemäß* (27) *in eindeutiger Weise stetig auf* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *fortsetzen, denn für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$a^r = \exp(\ln a^r) = \exp(r \ln a) \overset{r \in \mathbb{Q},\, r \to x}{\longrightarrow} \exp(x \ln a).$$

Dabei ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x := \exp(x \ln a)$, *ihre eindeutige stetige Fortsetzung. Hierfür gelten die folgenden* ***Rechenregeln****. Seien* $a \in \mathbb{R}_+$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(iii) $\ln a^x = x \ln a$.

Beweis. (i) gilt, weil $a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x\ln a + y \ln a) = \exp(x \ln a) \cdot \exp(y \ln a) = a^x a^y$. Zu (ii) beachte man, dass $(a^x)^y$ definiert ist, weil $a^x \in \mathbb{R}_+$. Es folgt $(a^x)^y = \exp(y \ln a^x) = \exp(y \underbrace{\ln(\exp(x\ln a))}_{=x\ln a}) = \exp(yx \ln a) = a^{xy}$. Schließlich gilt (iii), weil $\ln a^x = \ln(\exp(x \ln a))$. □

Natürlich läßt sich die Potenzfunktion weiter auf $\mathbb{C}$ fortsetzen durch $a^z := \exp(z \ln a)$ für $a \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{C}$. Dabei gilt weiterhin $a^{z+w} = a^z a^w\ \forall z, w \in \mathbb{C}$. Für $a = e$ ist speziell $\boxed{e^z = \exp z}$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeige: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^s$ (vgl. (4.13)) ist stetig, für $s \neq 0$ injektiv mit Wertebereich $\mathbb{R}_+$, für $s > 0$ streng monoton wachsend und für $s < 0$ streng monoton fallend.

Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen

(32) Definition. Seien $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in \overline{D}$. Man schreibt

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{z\to a} f(z) = -\infty)$$

falls $\forall C \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\, \forall z \in D$ mit $|z - a| < \delta :\ f(z) > C$ (bzw. $f(z) < C$).

Beispiel. Sei $0 \notin D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$.

- $D = \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.
- $D = \mathbb{R}_- \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht!

(33) Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt und $f : D \to \mathbb{K}$.

(i) Für $b \in \mathbb{R}$ schreibt man $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in D$ mit $x > M$: $|f(x) - b| < \epsilon$.

(ii) Sei f reellwertig. Man schreibt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (bzw. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$), falls $\forall C \in \mathbb{R}\ \exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in D$ mit $x > M$: $f(x) > C$ (bzw. $f(x) < C$).

$\boxed{\text{Üb}}$ Definiere dementsprechend: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(34) Beispiele. (a) *Sei $p := X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$. D.h. p ist ein reelles Polynom n-ten Grades mit Leitkoeffizient* 1. *Dann gilt für die Polynomfunktion auf $\mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty \ \text{ und } \lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty & \text{für gerade } n, \\ -\infty & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Beweis. Da $p(x) = x^n\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^{n-k}}\right)$, ist $p(x) \geq x^n\left(1 - \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)$ für $x \geq 1$. Für $x \geq \max\left\{1, 2\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right\}$ ist daher $p(x) \geq x^n\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x^n \geq \frac{1}{2}x$. — Sei nun $C \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Für $M := 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1}|a_k| + 2|C|$ gilt $p(x) > C\ \forall x > M$. Daher $p(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Die übrigen Behauptungen beweist man analog. □

(b) *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$. Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede (noch so große) Potenz.*

Beweis. Für $x > 0$ ist $\frac{e^x}{x^k} = \frac{1}{x^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} > \frac{1}{x^k}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x}{(k+1)!}$. Sei $C \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Für $M := (k+1)!|C|$ gilt $\frac{e^x}{x^k} > C\ \forall x > M$. □

(35) Lemma. *Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{K}$ und D nach oben unbeschränkt. Gilt $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)| = \infty$, so folgt $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in D$ mit $x > M$: $|f(x)| > \frac{1}{\epsilon} \implies \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \epsilon\ \forall x \in D$ mit $x > M$. □

(36) Beispiele.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0$ *für jedes $k \in \mathbb{N}$.* Das folgt direkt aus (34)(b) und (35).

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, da der Logarithmus monoton wächst und $\ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$ ist.

(c) $\lim\limits_{x>0,\, x\to0} \ln x = -\infty$, weil $\lim\limits_{x>0,\, x\to0} \ln x \overset{(35)}{=} \lim\limits_{y\to\infty} \ln\frac{1}{y} = -\lim\limits_{y\to\infty}\ln y \overset{(b)}{=} -\infty$.

(d) *Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt* $\lim\limits_{x>0,\, x\to0} x^a = 0$. Denn $x^a = \exp(a\ln x)$ und daher
$$\lim_{x>0,\, x\to0} x^a \overset{(c)}{=} \lim_{y\to-\infty}\exp(ay) = \lim_{x\to-\infty}\exp x \overset{(a)}{=} 0.$$

(e) *Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt* $\lim\limits_{x>0,\, x\to0} x^{-a} = \infty$. Denn $\lim\limits_{x>0,\, x\to0} x^{-a} = \lim\limits_{x>0,\, x\to0}\frac{1}{x^a} \overset{(c),(35)}{=} \infty$.

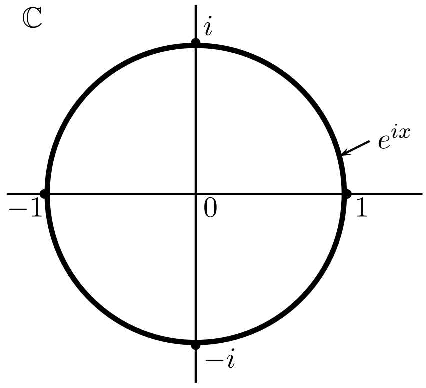
(f) *Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$, d.h. der Logarithmus wächst schwächer als jede (noch so kleine) Potenz.* Denn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \lim\limits_{x\to\infty} [(a \ln x)\exp(-a\ln x)] \overset{(b)}{=} \frac{1}{a} \lim\limits_{y\to\infty} ye^{-y} \overset{(a)}{=} 0$.

(g) *Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt $\lim\limits_{x>0,\, x\to 0} x^a \ln x = 0$.* Denn $\lim\limits_{x>0,\, x\to 0} x^a \ln x = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{1}{y^a}(-\ln y) \overset{(f)}{=} 0$.

Trigonometrische Funktionen

Wie beginnen mit dem Nachweis einer weiteren Eigenschaft der Exponentialfunktion.

(37) Lemma. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}| = 1$, d.h. e^{ix} liegt auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene.*



Beweis. $|e^{ix}|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} \overset{(6.17)}{=} \exp(ix)\exp(\overline{ix}) = \exp(ix)\exp(-ix) \overset{(6.17)}{=} \exp(ix - ix) = \exp(0) \overset{(6.17)}{=} 1$. □

(38) Definition. Die trigonometrischen Funktionen **Kosinus** und **Sinus** sind definiert als

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos x := \operatorname{Re} e^{ix},$$
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin x := \operatorname{Im} e^{ix}.$$

Daher gelten für jedes $x \in \mathbb{R}$ die **Eulerschen Formeln**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

(39) Erste Eigenschaften. *Für $x,\, y \in \mathbb{R}$ gelten:*

- $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, *d.h. der Kosinus ist eine gerade und der Sinus eine ungerade Funktion.*
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

- $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
- ***Additionstheoreme:*** $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

Schließlich sind $\cos$ *und* $\sin$ *stetige reellwertige Funktionen auf* $\mathbb{R}$.

Beweis. Die Additionstheoreme folgen sofort aus $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$. So ist $\cos(x+y) = \mathrm{Re}\ e^{i(x+y)} = \mathrm{Re}\ (e^{ix}e^{iy}) = \mathrm{Re}\ ((\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Ebenso folgt das Additionstheorem des Sinus. — Alle übrigen Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus den Eigenschaften von e^{ix}. □

(40) Reihendarstellungen. *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

wobei die Reihen absolut konvergieren. Weiter gelten die Restgliedabschätzungen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x) \quad \textit{mit } |R_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \ \textit{für } |x| \le 2n+1,\ n \ge 0,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x) \quad \textit{mit } |R_{2n+3}(x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \ \textit{für } |x| \le 2n+2,\ n \ge 0.$$

Für die Restglieder gilt also einheitlich: $|R_l(x)| \le \frac{|x|^l}{l!}$ *für* $|x| \le l-1$, $l \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die absolute Konvergenz der Reihen folgt leicht mit dem Quotientenkriterium. Weiter gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{j=0}^{2N} \frac{(ix)^j}{j!}$, weil $(-1)^k = i^{2k}$ und $i(-1)^k = i^{2k+1}$. Der Grenzübergang $N \to \infty$ liefert:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\in \mathbb{R}} = e^{ix}.$$

Daraus ergeben sich die Reihendarstellungen für cos und sin. — Seien nun $a_k := \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$ die Absolutbeträge der Glieder der Kosinusreihe. Für $|x| \le 2n+1$ ist $(a_k)_{k \ge n}$ eine monotone Nullfolge, denn $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}}{\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}} = \frac{|x|^2}{(2k+2)(2k+1)} < 1$. Mit der Abschätzung aus dem Leibniz Kriterium (6.9) folgt:

$$|R_{2n+2}(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \le a_{n+1} = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Die Abschätzung für den Sinus zeigt man analog. □

(41) Wichtige Grenzwerte. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ *und* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Beweis. Da $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x)$ mit $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{24}$ für $|x| \leq 3$, folgt $\frac{\cos x - 1}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{R_4(x)}{x} \overset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 0$. — Ebenso folgt aus $\sin x = x + R_3(x)$ mit $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$ für $|x| \leq 2$, dass $\frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{R_3(x)}{x} \overset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 1$. □

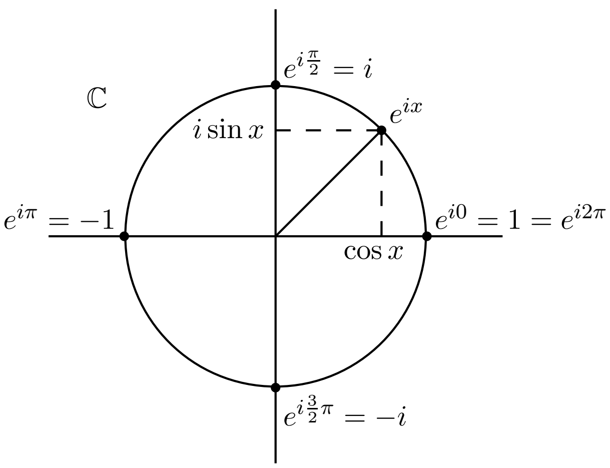
Da $\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2} + R_4(2) \leq 1 - 2 + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3}$ und $\cos 0 = 1$, folgt aus dem ZWS die Existenz von $x_0 \in [0,2]$ mit $\cos x_0 = 0$. Die folgende Definition ist damit sinnvoll.

(42) Definition. Kreiszahl. Man setzt $\pi := 2 \cdot \inf\{x \in [0,2] : \cos x = 0\}$.

(43) Weitere Eigenschaften. Aus der Definition von π folgt $\pi \in]0,4[$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ (weil cos stetig ist) und $\cos x > 0\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. — Allgemein für $0 < x \leq 2$ gilt: $\sin x = x + R_3(x) \geq x - \frac{x^3}{6} \geq x\left(1 - \frac{4}{6}\right) > 0$. Also ist $\sin x > 0$ für $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Wegen $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ folgt hieraus $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Es schließen sich folgende Überlegungen an.

$$
\begin{aligned}
&e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i;\\
&e^{i\pi} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = i^2 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi \Rightarrow \cos \pi = -1,\ \sin \pi = 0;\\
&e^{\frac{3\pi}{2}} = e^{i\pi + i\frac{\pi}{2}} = e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = -1 \cdot i = -i;\\
&e^{i2\pi} = (e^{i\pi})^2 = (-1)^2 = 1;\\
&e^{-i2\pi} = \frac{1}{e^{i2\pi}} = \frac{1}{1} = 1;\\
&e^{i2\pi k} = (e^{i2\pi})^k = 1^k = 1\ \forall k \in \mathbb{Z};\\
&e^{i(x+2\pi k)} = e^{ix} \cdot e^{i2\pi k} = e^{ix} \cdot 1 = e^{ix}\ \forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Die letzte Eigenschaft bedeutet, dass $x \mapsto e^{ix}$ 2π–**periodisch** ist. Damit sind sin und cos ebenfalls 2π–periodisch.

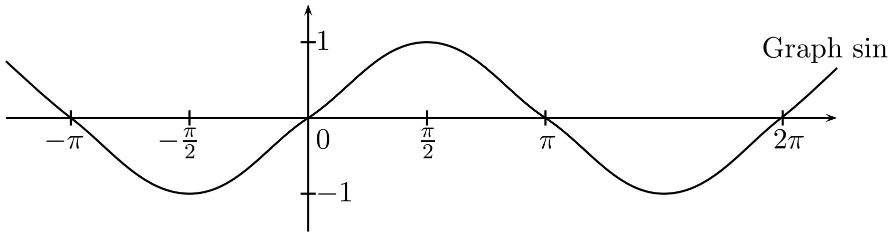


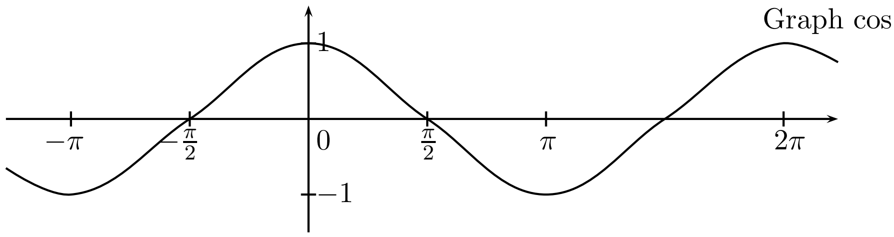
Aus den Additionstheoremen ergeben sich:

$$\begin{aligned}
\cos(x+\pi) &= -\cos x,\\
\sin(x+\pi) &= -\sin x,\\
\cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\\
\sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).
\end{aligned}$$

Damit sind sin, cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bereits durch ihre Werte auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ bestimmt. Insbesondere lauten die Nullstellen:

$$\begin{aligned}
\sin x = 0 &\iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\\
\cos x = 0 &\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

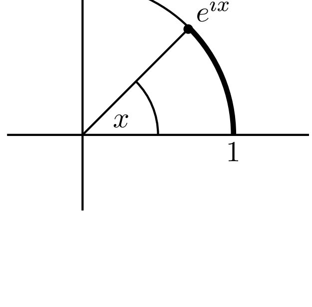




Es bleibt die geometrische Bedeutung des Arguments x in e^{ix} zu klären. Dazu betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(\cos x, 0)$, $(\cos x, \sin x)$, was auch entartet sein kann:

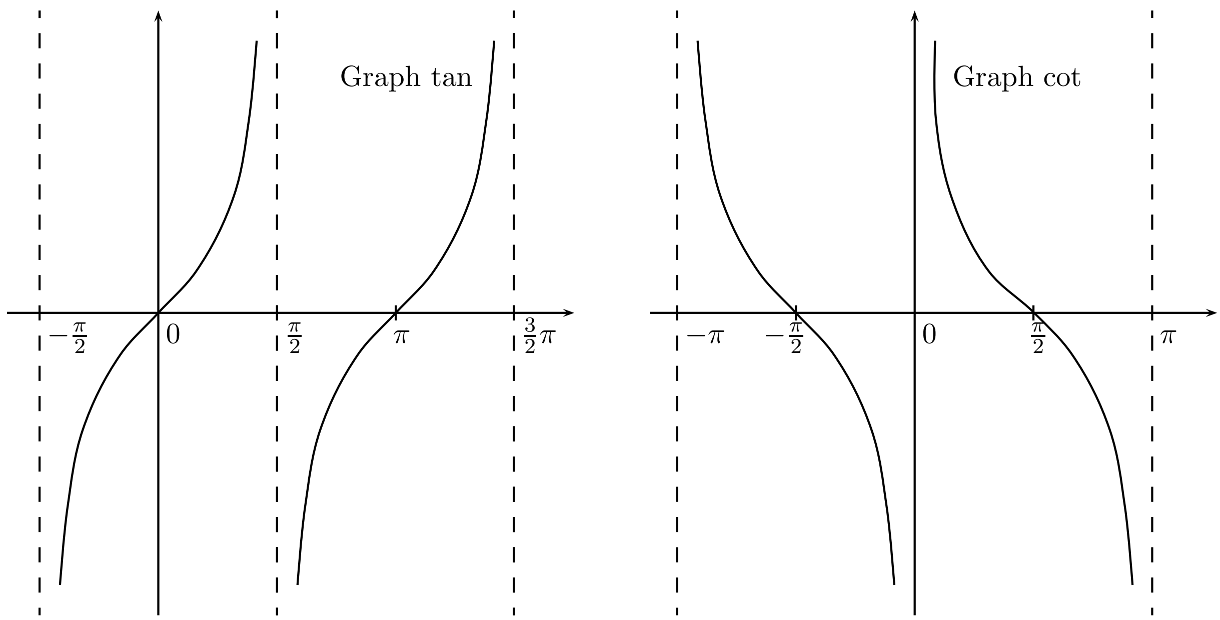
$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \implies \cos x \geq 0$; $\sin x \geq 0 \implies e^{ix} \in Q_1$ (1. Quadrant). $e^{i0} = 1 \implies \cos 0 = 1 = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$, ebenso $e^{i\frac{\pi}{2}} = i \implies \cos\frac{\pi}{2} = 0 = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$. Weiter $e^{i\frac{\pi}{4}} \in Q_1$, $(e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \implies \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$, was man elementargeometrisch bestimmt. Allgemein gilt: $e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n}} \in Q_1$ und $(e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n}})^{2^n} = i \implies \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$. Das bedeutet, dass $e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{j}{2^n}}$ für $j = 0, \ldots, 2^n$ stets dieselbe geometrische Bedeutung hat. Da nun $\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{j}{2^n} : j = 0, \ldots, 2^n, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ dicht in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ liegt, folgt aus der Stetigkeit von $x \mapsto e^{ix}$ und der "Stetigkeit des geometrischen Bildes" generell, dass

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ mit **x der Winkel im Bogenmaß**



(44) Definition. Tangens und Kotangens.

$$\begin{aligned}\tan :&\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\ \tan x := \frac{\sin x}{\cos x},\\ \cot :&\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R},\ \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}.\end{aligned}$$



Es gilt:

$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \tan x,\\ \cot(x+\pi) &= \cot x,\end{aligned}$$

d.h. die beiden Funktionen sind π-periodisch, und es besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\tan(\frac{\pi}{2}-x) &= \cot x,\\ \cot(\frac{\pi}{2}-x) &= \tan x.\end{aligned}$$

Die Behauptungen folgen unmittelbar aus (43).

8 Differenzierbare Funktionen

Seien $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und $a \in D$. Die Funktion f soll in der Nähe von a durch eine einfache Funktion angenähert werden. Naheliegend ist die Approximation durch eine affine Funktion $z \mapsto \alpha + \beta z =: \gamma(z)$.

Wir untersuchen die Differenz $R_1(z) := f(z) - \gamma(z)$. Zumindest soll $R_1(a) = 0$ gelten. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn $\alpha = f(a)$. Von einer guten Approximation erwartet man jedoch mehr, als nur die Übereinstimmung der Funktionswerte an der Stelle a. Dazu muss aber f zusätzliche Eigenschaften haben. So gilt:

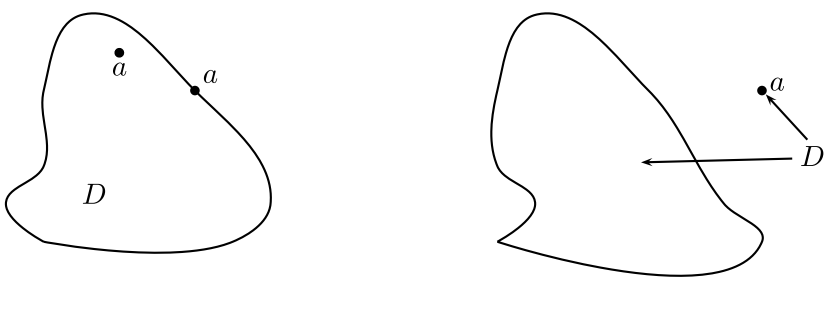
- $R_1(z) \overset{z \to a}{\longrightarrow} 0$, d.h. R_1 **verschwindet in** 0**-ter Ordnung für** $z \to a \iff f$ ist stetig in a.

Die Stetigkeit einer Funktion ist uns ein vertrauter Begriff. Eine weitergehende Eigenschaft ist die Differenzierbarkeit. Sie erlaubt eine noch bessere Approximation:

- $\frac{R_1(z)}{z-a} \overset{z \to a,\, z \neq a}{\longrightarrow} 0$, d.h. R_1 **verschwindet in** 1**-ter Ordnung für** $z \to a \overset{:}{\iff} f$ ist differenzierbar in a.

Es ist also definitionsgemäß f differenzierbar in a, wenn $\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \overset{z \to a,\, z \neq a}{\longrightarrow} \beta$. Man bezeichnet den Grenzwert β mit $f'(a)$. Damit der Grenzübergang $z \to a$, $z \neq a$ durchgeführt werden kann, muss a durch Elemente aus $D \setminus \{a\}$ approximiert werden können, d.h. es muss $a \in \overline{D \setminus \{a\}}$ gelten.

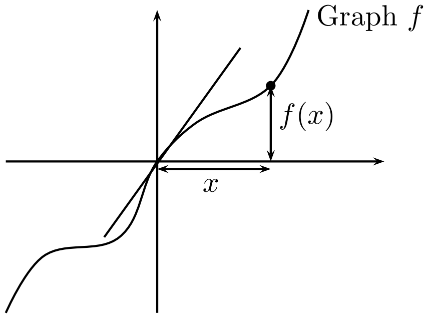
$a \in \overline{D \setminus \{a\}}$: $\qquad\qquad$ $a \notin \overline{D \setminus \{a\}}$:



Zwei wichtige Situationen, wo diese Eigenschaft vorliegt, sind offenbar

- D offen $\Longrightarrow a \in \overline{D \setminus \{a\}}$ $\forall a \in D$.
- $D \subset \mathbb{R}$, $D = I$ Intervall $\Longrightarrow a \in \overline{I \setminus \{a\}}$ $\forall a \in I$.

Seien $D = I$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$. Dann ist $\frac{f(z)}{z} \overset{z \to 0,\, z \neq 0}{\longrightarrow} \beta$ der Anstieg der Tangente an den Graphen von f in 0:



(1) Definition. Seien $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und $a \in D$. Dann heißt f **differenzierbar in** a, falls $a \in \overline{D \setminus \{a\}}$ ist und $\lim\limits_{\substack{h \to 0,\ h \neq 0 \\ a+h \in D}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(a)$ bezeichnet und heißt die **Ableitung von** f **in** a. Weiter heißt f **differenzierbar in** D, falls f in jedem Punkt von D differenzierbar ist.

Bemerkungen. (a) Es ist $\lim\limits_{\substack{h \to 0,\, h \neq 0 \\ a+h \in D}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{\substack{z \to a,\ z \neq a \\ z \in D}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Dabei heißt $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ der **Differenzenquotient** zu f an der Stelle a. Die Bedingungen $h \neq 0,\ a+h \in D$ bzw. $z \neq a,\ z \in D$ sind selbstverständlich und wir werden sie der Kürze halber oftmals nicht hinschreiben.

(b) Es genügt offenbar stets, D als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufzufassen, auch wenn $D \subset \mathbb{R}$ ist.

Beispiele. (i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \alpha + \beta z$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\alpha+\beta(a+h)-(\alpha+\beta a)}{h} = \frac{\beta h}{h} = \beta$.

Also ist f differenzierbar in $\mathbb{C}$ mit konstanter Ableitung $f'(z) = \beta$.

(ii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^2$:

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a + h \overset{h\to 0,\ h\neq 0}{\longrightarrow} 2a$.

Also ist f differenzierbar in $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = 2z$.

(iii) $I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $I(z) := \frac{1}{z}$, Inversion. Für $a \neq 0$ ist

$\frac{I(a+h)-I(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{ha(a+h)} = \frac{-h}{ha(a+h)} = -\frac{1}{a(a+h)} \overset{h\to 0,\ h\neq 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{a^2}$.

Also ist I differenzierbar in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

(iv) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := e^z$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{e^{a+h}-e^a}{h} \overset{h\to 0,\ h\neq 0}{\longrightarrow} e^a$

nach (7.29)(c). Also ist exp differenzierbar in $\mathbb{C}$ mit $\exp' = \exp$.

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(z) := e^{ix}$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{e^{i(a+h)}-e^{ia}}{h} = \frac{e^{ia+ih}-e^{ia}}{ih}\, i \overset{h\to 0,\ h\neq 0}{\longrightarrow} e^{ia}\, i$

nach (7.29)(c). Also ist f differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = ie^{ix} = if(x)$.

(vi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos x$:

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \operatorname{Re} \frac{e^{i(a+h)}-e^{ia}}{h} \xrightarrow[h \to 0,\ h \neq 0]{\mathit{Re}\text{ stetige Funktion, (v)}} \operatorname{Re} ie^{ia} = -\sin a$.

Also ist cos differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit $\cos' x = -\sin x$. — Genauso zeigt man: sin ist differenzierbar mit $\sin' x = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

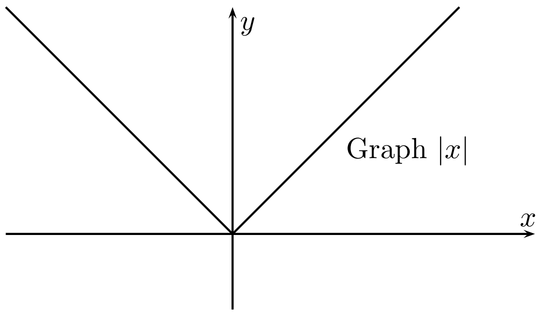
(vii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$. Hier unterscheiden wir drei Fälle.

1. $a > 0$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{|a+h|-|a|}{h} \overset{|h|<a}{=} \frac{a+h-a}{h} = 1$
2. $a < 0$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{|a+h|-|a|}{h} \overset{|h|\leq|a|}{=} \frac{-a-h+a}{h} = -1$
3. $a = 0$: $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$

   konvergiert **nicht** für $h \to 0$, denn z.B. für $h = (-1)^n \frac{1}{n}$ ist $\frac{|h|}{h} = (-1)^n$.

Das Fazit ist, dass f genau auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$



(2) Satz. *Seien $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und $a \in \overline{D \setminus \{a\}}$. Weiter seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $R_1(h) := f(a+h) - \alpha - \beta h$ verschwindet in 1. Ordnung für $h \to 0$, $h \neq 0$ genau dann, wenn f in a differenzierbar ist und $\alpha = f(a)$, $\beta = f'(a)$ ist.*

Beweis. R_1 verschwinde in 1. Ordnung, d.h. $R_1(0) = 0$ und $\frac{R_1(h)}{h} \overset{h\to 0,\ h\neq 0}{\longrightarrow} 0$. Aus $R_1(0) = 0$ folgt sofort $f(a) = \alpha$. Da weiter $\frac{R_1(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \beta \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, ist f differenzierbar in a mit $f'(a) = \beta$. — Die umgekehrte Richtung zeigt man ebenso einfach. □

M. a. W. ist $z \to f(a) + f'(a)(z-a)$ die beste affine Approximation von f in der Nähe von a.

(3) Satz. *f differenzierbar in $a \Longrightarrow f$ stetig in a.*

Beweis. $f(z) - f(a) = \underbrace{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}_{\overset{z\to a}{\longrightarrow} f'(a)} \underbrace{(z-a)}_{\overset{z\to a}{\longrightarrow} 0} \overset{z\to a}{\longrightarrow} 0.$ □

(4) Rechenregeln der Differenziation. *Seien $D \subset \mathbb{K}$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $a \in D$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gelten*

- *die **Linearität**: $f + \lambda g$ ist differenzierbar in a mit $(f+\lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$.*
- *die **Produktregel**: fg ist differenzierbar in a mit $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

Beweis.

- $\frac{(f+\lambda g)(a+h)-(f+\lambda g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lambda \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \overset{h\to 0, h\neq 0}{\longrightarrow} f'(a) + \lambda g'(a)$.
- $\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = \underbrace{f(a+h)}_{\overset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a)} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \overset{h\to 0, h\neq 0}{\longrightarrow} f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$.

□

(5) Kettenregel. *Seien $D, E \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$ mit $f(D) \subset E$, f differenzierbar in $a \in D$ und g differenzierbar in $f(a)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{C}$, $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ differenzierbar in a mit*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Beweis. Naheliegend ist die Umformung $\frac{g(f(z))-g(f(a))}{z-a} = \frac{g(f(z))-g(f(a))}{f(z)-f(a)} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Allerdings läßt sich hier der Grenzprozess $z \to a$, $z \neq a$ nur ausführen, wenn dabei $f(z) \neq f(a)$ ist. Aber es gilt allgemein für alle $z \neq a$:

$$\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z-a} = \beta(f(z)) \frac{f(z) - f(a)}{z-a}$$

mit $\beta(w) := \begin{cases} \frac{g(w)-g(f(a))}{w-f(a)} & \text{für } w \neq f(a), \\ g'(f(a)) & \text{für } w = f(a) \end{cases}$ für alle $w \in E$. Dabei ist β stetig in $f(a)$, weil g differenzierbar in $f(a)$ ist. Bildet man jetzt den Grenzübergang $z \overset{z\neq a}{\longrightarrow} a$, so folgt die Behauptung.

□

(6) Korollar. ***Quotientenregel****. Seien $D \subset \mathbb{K}$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $a \in D$ und $g(z) \neq 0\ \forall z \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in a mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Beweis. Es ist $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} = f \cdot I \circ g$, wobei I die Inversion ist. Wendet man die Produkt- und die Kettenregel an, dann folgt mit dem Beispiel (iii) zu (1):

$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = (f \cdot I \circ g)'(a) = f'(a)(I \circ g)(a) + f(a)(I \circ g)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\, I'(g(a))g'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)g'(a)\frac{-1}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$. □

Beispiele. (i) *Sei $f(z) := z^m$ für $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und $z \neq 0$ falls $m < 0$. Dann ist $f'(z) = mz^{m-1}$.*

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $z \neq z_0$ ist $\frac{z^m - z_0^m}{z-z_0} = \sum_{k=0}^{m-1} z_0^k z^{m-1-k} = z^{m-1} + z^{m-2}z_0 + \ldots + zz_0^{m-1} + z_0^m$, weshalb

$$\lim_{z\to 0, z\neq 0} \frac{z^m - z_0^m}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{m-1} z_0^k z_0^{m-1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{m-1} = mz_0^{m-1}.$$

Hieraus folgt für z^{-m} mit der Quotientenregel $\left(\frac{1}{z^m}\right)'|_{z=z_0} = \frac{-mz_0^{m-1}}{z_0^{2m}} = -mz_0^{-m-1}$. □

(ii) *Für* $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, *gilt* $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$.

Beweis. $\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. □

(iii) *Für* $a \in \mathbb{R}_+$ *ist* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := a^z$, *die* ***Potenzfunktion zur Basis*** a. *Dafür gilt* $f'(z) = (\ln a)a^z$.

Beweis. Definitionsgemäß ist $f(z) = \exp(z \ln a)$. Wegen $\exp' = \exp$ folgt mit der Kettenregel $f'(z) = \exp(z \ln a) \ln a = (\ln a)a^z$. □

(7) Ableitung der Umkehrfunktion. *Seien* $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ *injektiv,* $a \in D$ *und* f *differenzierbar in* a *mit* $f'(a) \neq 0$. *Weiter bezeichne* $g : f(D) \to \mathbb{C}$ *die Umkehrfunktion von* f, *d.h.* $g(f(z)) = z \ \forall z \in D$. *Sei* g *stetig in* $f(a)$. *Dann ist* g *differenzierbar in* $f(a)$ *und es gilt:*

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \quad \textit{bzw.} \quad g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))} \ \textit{für } b = f(a).$$

Beweis. Da $a \in \overline{D \setminus \{a\}}$, existiert (z_n) in D mit $z_n \to a$ und $z_n \neq a$. Weil f stetig in a und injektiv ist, folgt $f(z_n) \in f(D)$, $f(z_n) \to f(a)$ und $f(z_n) \neq f(a)$, was $f(a) \in \overline{f(D) \setminus \{f(a)\}}$ bedeutet. Damit ist die erste Voraussetzung für die Differenzierbarkeit von g in $f(a)$ erfüllt.

Sei nun $b := f(a)$ und $w \neq b$. Dann ist $g(w) \neq g(b)$, weil g injektiv ist, und $\frac{g(w)-g(b)}{w-b} = \frac{g(w)-g(b)}{f(g(w))-f(g(b))} = \left(\frac{f(g(w))-f(g(b))}{g(w)-g(b)}\right)^{-1}$. Aus $w \to b$ folgt $g(w) \to g(b)$, weil g nach Voraussetzung in b stetig ist. Daher $\frac{g(w)-g(b)}{w-b} \overset{w \to b}{\longrightarrow} (f'(g(b)))^{-1}$. Also ist g in b differenzierbar mit $g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$. □

(8) Korollar. *Seien* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und streng monoton,* $x \in [a, b]$ *und* f *differenzierbar in* x *mit* $f'(x) \neq 0$. *Dann ist die Umkehrfunktion* $g : f([a, b]) \to \mathbb{R}$ *in* $y = f(x)$ *differenzierbar mit*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Beweis. f ist injektiv nach (4.9) und g ist stetig nach (7.13). Damit sind die Voraussetzungen von (7) erfüllt und es folgt die Behauptung. □

Beispiele. (i) $\ln' x = \frac{1}{x} \ \forall x > 0$.

Beweis. Nach (7.30)(ii) ist (8) auf $\ln|_{[a,b]}$ mit $0 < a < b < \infty$ anwendbar. Man erhält $\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$. □

(ii) *Sei* $\alpha \in \mathbb{C}$ *und* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $f(x) := x^\alpha$. *Dann ist* $f'(a) = \alpha x^{\alpha-1}$. *Vgl. dazu das Beispiel* (i) *zu* (6).

Beweis. Definitionsgemäß ist $f(x) = \exp(\alpha \ln x)$. Aus (i) folgt mit der Kettenregel $f'(x) = \exp(\alpha \ln x)\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. □

(9) Nochmals die Exponentialfunktion. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert und ist*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x}$$

Beweis. Sei $n > |x|$. Dann ist $1 + \frac{x}{n} > 0$, so dass ln wie folgt anwendbar ist:

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{x}{n}) - \ln 1}{(1+\frac{x}{n}) - 1}}_{\text{Differenzenquotient}} x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln'(1)\cdot x = x.$$

Das bedeutet $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(x)$, da exp stetig ist. □

(10) Definition. Höhere Ableitungen. Seien $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $a \in D$, $a \in \overline{D \setminus \{a\}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Setze $f^{(0)} := f$ und definiere rekursiv: f heißt **n-mal differenzierbar** in a, wenn für $f^{(n-1)}(a)$ der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0, a+h\in D} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h} =: f^{(n)}(a)$$

existiert. $f^{(n)}$ heißt gegebenenfalls die **n-te Ableitung von f in a**. — Weiter heißt f **n-mal differenzierbar (in D)**, falls f in jedem Punkt von D n-mal differenzierbar ist, und f **heißt n-mal stetig differenzierbar in** D, falls f n-mal differenzierbar (in D) ist und $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$ stetig ist. Außerdem führt man folgende Funktionenräume ein:

$C^0(D) := C(D) := \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ stetig}\}$,

$C^n(D) := \{f : D \to \mathbb{C} : f\ n\text{-mal stetig differenzierbar}\}$,

$C^\infty(D) := \bigcap_{n=1}^\infty C^n(D) = \{f : D \to \mathbb{C} : f\ n\text{-mal stetig differenzierbar für jedes } n \text{ in } \mathbb{N}\}$.

Man nennt $f \in C^\infty(D)$ beliebig oft differenzierbar. Offenbar gilt $C(D) \supset C^n(D) \supset C^{n+1}(D) \supset C^\infty(D)$.

Wir wenden uns jetzt elementaren Anwendungen der Ableitung zu.

(11) Definition. Seien $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt $z_0 \in D$ ein **lokales Maximum** von f (in D), falls ein $r > 0$ existiert mit

$$f(z_0) \geq f(z) \;\; \forall z \in U_r(z_0) \cap D.$$

Entsprechend ist ein **lokales Minimum** definiert. Weiter heißt z_0 ein **lokales Extremum** von f (in D), falls z_0 ein lokales Maximum oder Minimum ist. Wenn es nötig ist, werden wir genauer von lokaler Maximal-, Minimal- und Extremalstelle sprechen.

(12) Satz. *Seien $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$ ein lokales Extremum von f und f differenzierbar in x_0. Dann gilt*

$$f'(x_0) = 0.$$

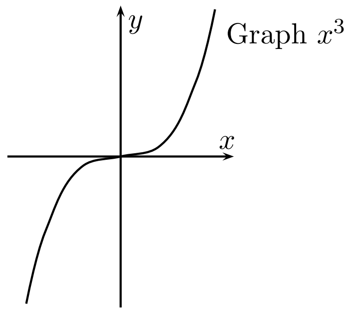
Beweis. Sei o.E. x_0 ein lokales Maximum, sonst betrachte man $-f$. Dann existiert $r > 0$ mit $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in U_r(x_0) \cap]a,b[$. Verkleinert man r so, dass $U_r(x_0) \subset]a,b[$, dann folgt für $0 < h < r$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \overset{h\to 0}{\Longrightarrow} f'(x_0) \leq 0, \qquad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \geq 0 \overset{h\to 0}{\Longrightarrow} f'(x_0) \geq 0.$$

□

(13) Definition. Seien $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und f differenzierbar in a mit $f'(a) = 0$. Dann heißt f **stationär** in a.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und somit $f'(0) = 0$. Also ist f stationär in 0. Aber 0 ist keine Extremalstelle von f, denn $f(x) < 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$.

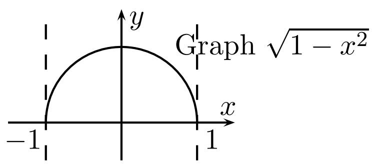


(14) Satz von Rolle. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f|_{]a,b[}$ differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann existiert $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Nach (7.16) nimmt f in $[a,b]$ ein Maximum und ein Minimum an. Sei f nicht konstant, da sonst die Behauptung trivial ist. Dann ist die Maximalstelle von der Minimalstelle verschieden. Also muss eine der beiden Stellen in $]a,b[$ liegen. Aus (12) folgt daher die Behauptung. □

Beispiel. Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{1-x^2}$. Dafür gilt:

1. f ist stetig mit $f(-1) = 0 = f(1)$.
2. $f|_{]-1,1[}$ ist differenzierbar mit $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. f ist nicht differenzierbar in $\{-1,1\}$ wegen der vertikalen Tangenten dort.



3. $f'(0) = 0$.

(15) Verallgemeinerter Mittelwertsatz. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f|_{]a,b[}$, $g|_{]a,b[}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a, b[$. Dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $\xi \in]a, b[$[1] mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Es ist $g(a) \neq g(b)$ aufgrund des Satzes von Rolle. Setze $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. Dann gilt: $F(a) = f(a) = F(b) \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in]a, b[$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$. Daraus folgt die Behauptung. □

(16) Korollar. ***Mittelwertsatz****. Sei f wie in* (15)*. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus (15) mit $g(x) = x$. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Gilt der Mittelwertsatz auch für komplexwertige Funktionen? Man gebe einen Beweis oder führe ein Gegenbeispiel an.

(17) Korollar. *Sei f wie in* (15) *und $f'(x) = 0 \; \forall x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Wende (16) auf das Teilintervall $[a, x] \subset [a, b]$ für $x \in]a, b]$ an. Es folgt $f(x) = f(a)$. □

(18) Satz von De L'Hospital. Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$, $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in]a, b[$ derart, dass folgende Grenzwerte für $x \to b$ existieren:

- $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ oder $\lim f(x) \in \{-\infty, \infty\}$, $\lim g(x) \in \{-\infty, \infty\}$,
- $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Dann existiert und ist

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Entsprechendes gilt für den Grenzprozess $x \to a$.

Beweis. **Fall 1:** Sei $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ und $b \in \mathbb{R}$. — Durch $f(b) := g(b) := 0$ werden f und g in b stetig fortgesetzt (siehe (7.27)(ii)). Sei $a < x < b$. Nach (15) existiert $\xi \in]x, b[$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Aus $x \to b$ folgt $\xi \to b$. Daher gilt die Behauptung, und zwar auch für den Fall, dass $L \in \{-\infty, \infty\}$.

[1] ξ ="xi"

Fall 2: Sei $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$, $b \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathbb{R}$. — Nach (15) gilt: $\forall u, x \in]a, b[$ mit $u < x$ $\exists \xi \in]u, x[$ mit $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)}$, d.h.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{1 - \frac{g(u)}{g(x)}}{1 - \frac{f(u)}{f(x)}}}_{=:V(u,x)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Aus $\frac{f(x)}{g(x)} - L = V(u,x)\left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right) + (V(u,x) - 1)\, L$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq |V(u,x)| \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| + |V(u,x) - 1||L|.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es exisitert $u_0 \in]a, b[$ derart, dass $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \frac{\epsilon}{4}$ $\forall t \in]u_0, b[$, weil $\frac{f'(t)}{g'(t)} \overset{t\to b}{\longrightarrow} L$. Weiter existiert $x_0 \in]u_0, b[$ derart, dass $\left|\frac{g(u_0)}{g(x)}\right|, \left|\frac{f(u_0)}{f(x)}\right| < \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{\epsilon}{6(1+|L|)}\right\}$ $\forall x \in]x_0, b[$, weil $g(x), f(x) \overset{x\to b}{\longrightarrow} \infty$. Damit gilt für alle $x \in]x_0, b[$:

$$|V(u_0, x)| \leq \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2,$$

$$|V(u_0, x) - 1| = \frac{\left|\frac{f(u_0)}{f(x)} - \frac{g(u_0)}{g(x)}\right|}{\left|1 - \frac{f(u_0)}{f(x)}\right|} \leq \frac{2\frac{\epsilon}{6}\frac{1}{1+|L|}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{1+|L|}$$

und somit

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{1+|L|}|L| < \epsilon.$$

Das bedeutet $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Fall 3: Sei $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$, $b \in \mathbb{R}$, $L = \infty$. — Sei $C > 0$ vorgegeben. Es existiert $u_0 \in]a, b[$ derart, dass $\frac{f'(t)}{g'(t)} > 2C$ $\forall t \in]u_0, b[$, weil $\frac{f'(t)}{g'(t)} \to \infty$. Weiter existiert $x_0 \in]u_0, b[$ derart, dass $\left|\frac{g(u_0)}{g(x)}\right|, \left|\frac{f(u_0)}{f(x)}\right| < \frac{1}{3}$ $\forall x \in]x_0, b[$, weil $f(x) \to \infty,\ g(x) \to \infty$. Damit gilt für alle $x \in]x_0, b[$:

$$|V(u_0, x)| \leq \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

und somit

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \cdot 2C = C.$$

Das bedeutet $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Der Fall $L = -\infty$ folgt analog. Die übrigen Fälle aus $\lim f(x) \in \{-\infty, \infty\}$, $\lim g(x) \in \{-\infty, \infty\}$ und $L \in \{-\infty, \infty\}$ folgen, indem man gegebenenfalls $-f$ und $-g$ betrachtet. Damit gelten alle Fälle mit $b \in \mathbb{R}$. Ganz entsprechend folgen alle Grenzprozesse $x \to a \in \mathbb{R}$.

Fall 4: Es wird der Grenzprozess $x \to b = \infty$ behandelt. — O.E. ist $a > -\infty$. Man betrachte $F(x) := f\left(\frac{1}{x-a}\right)$, $G(x) := g\left(\frac{1}{x-a}\right)$ für $x > a$ und $\frac{1}{x-a} > a$. Nach dem Bisherigen folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} \overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{x\to a} \frac{F'(x)}{G'(x)} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'\left(\frac{1}{x-a}\right)\frac{-1}{(x-a)^2}}{g'\left(\frac{1}{x-a}\right)\frac{-1}{(x-a)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Schließlich folgt der Fall $x \to a = -\infty$ analog aus dem Fall $b < \infty$. $\square$

Beispiele. (i) $\frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$ ist vom Typ "$\frac{0}{0}$" für $x \to \frac{\pi}{2}$. L'H: $\frac{\cos x}{1} \xrightarrow{x \to \frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Also folgt: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$.

(ii) $\frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ ist vom Typ "$\frac{0}{0}$" für $x \to 0$. L'H: $\frac{\sin x + x\cos x}{\sin x}$ ist vom Typ "$\frac{0}{0}$" für $x \to 0$, daher wieder L'H: $\frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} \xrightarrow{x \to 0} 2$. Also folgt: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = 2$.

(iii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ ist vom Typ "$\infty - \infty$" für $x \to 0$. Daher muss man zunächst umformen: $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$ ist vom Typ "$\frac{0}{0}$" für $x \to 0$. L'H: $\frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$ ist vom Typ "$\frac{0}{0}$" für $x \to 0$, daher wieder L'H: $\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \xrightarrow{x \to 0} \frac{0}{2} = 0$. Also folgt: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Man bestimme mit Hilfe des Satzes von De L'Hospital die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{1 - \cos\sqrt{x}}$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x + 100)}{-\ln x}$

(iv) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \tan(\frac{\pi}{2} x)$

(v) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$

(19) Satz. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{]a,b[}$ differenzierbar. Dann gelten:*

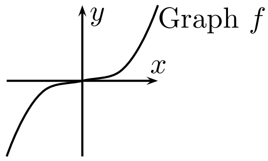
(i) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a, b[\iff f$ *monoton wachsend.*

(ii) $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a, b[\implies f$ *streng monoton wachsend.*

Entsprechende Aussagen gelten zu monoton fallend.

Beweis. Sei $a \leq x < y \leq b$. Nach (16) existiert $\xi \in]a, b[$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Damit gelten "$\Rightarrow$". — Zu "$\Leftarrow$": Sei $x_0 \in]a, b[$ vorgegeben. Dann gilt: $\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0 \ \forall x \in [a,b]} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0) \geq 0$. $\square$

Die Umkehrung in (19)(ii) gilt nicht: Man betrachte dazu $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, wofür $f'(x) = 3x^2 > 0$ für $x \neq 0$. Sei $x < y$. Es folgt $f(x) < f(y)$ falls $y \leq 0$ oder $x \geq 0$ wegen (19)(ii), aber auch im Fall $x < 0$, $y > 0$, weil hier $f(x) < 0$, $f(y) > 0$. Damit ist f streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

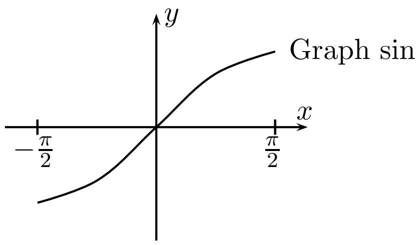


(20) Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^2(I)$ und a ein lokales Minimum von f. Dann gelten $f'(a) = 0$ und $f''(a) \geq 0$.*

Beweis. Sei $x \in I$ und $x < a$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in]x, a[$ mit $0 \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$. Ist $y \in I$ und $y > a$, dann existiert entsprechend $\eta \in]a, y[$ mit $0 \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(\eta)$. Schließlich existiert $\zeta \in]\xi, \eta[$ mit $0 \leq \frac{f'(\eta)-f'(\xi)}{\eta-\xi} = f''(\zeta)$. Für $x \to a$, $x < a$ und $y \to a$, $y > a$ folgt $f''(\zeta) \to f''(a)$, weil $x < \zeta < y$ und f'' stetig ist. Also ist $f''(a) \geq 0$.[2] ☐

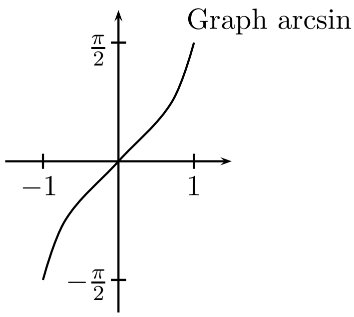
(21) Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

1. **Arcussinus.** Es ist $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und $\sin' x = \cos x > 0\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Daher ist $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$, streng monoton wachsend nach (19) und damit aufgrund des Zwischenwertsatzes bijektiv.



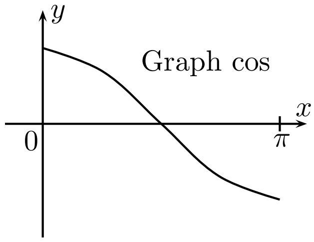
Die Umkehrfunktion heißt $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sie ist streng monoton wachsend, stetig (siehe (4.10), (7.13)) und nach (8) differenzierbar auf $]-1, 1[$ mit Ableitung

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \overset{\cos > 0}{=} \frac{1}{+\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



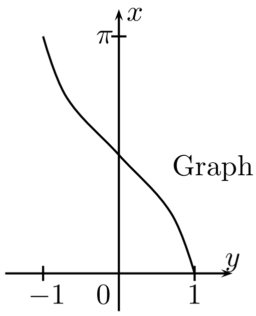
2. **Arcuscosinus.** Analog ist $[0, \pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$, streng monoton fallend und bijektiv.

[2] η="eta", ζ="zeta"

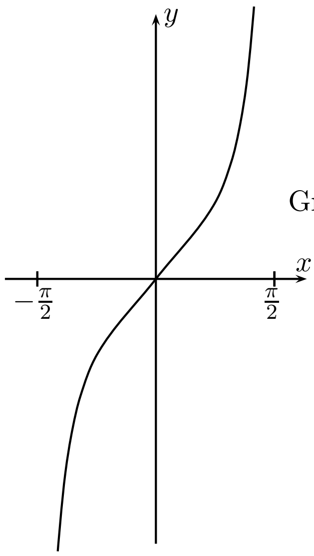


Die Umkehrfunktion heißt arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$. Ihre Ableitung lautet

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} \overset{\sin>0}{=} \frac{-1}{+\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

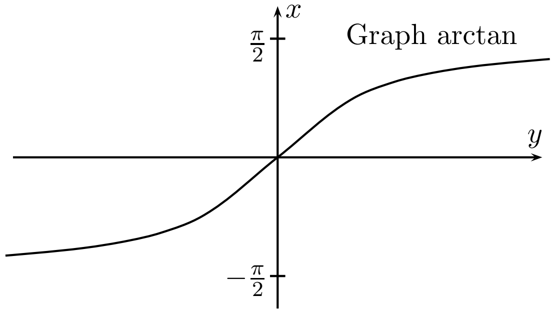


3. **Arcustangens.** Nach Beispiel (ii) zu (6) ist $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \;\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Daher ist $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$, streng monoton wachsend und damit aufgrund des Zwischenwertsatzes bijektiv, weil $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$. (Die Surjektivität beweist man wie $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ in (7.30)(i).)



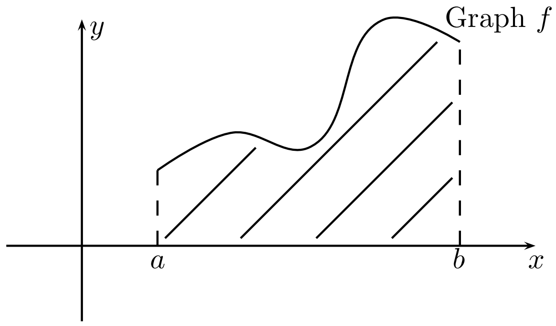
Die Umkehrfunktion heißt arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sie ist streng monoton wachsend, bijektiv und differenzierbar mit Ableitung

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

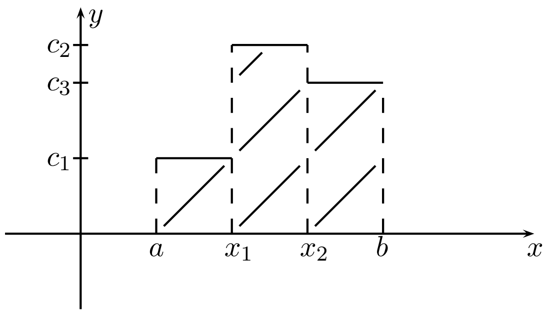

Graph arctan
x
y
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$

9 Regelfunktionen und ihr Integral

Wie berechnet man, besser definiert man, den Flächeninhalt unterhalb des Graphen einer positiven Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?



Dies ist klar im Falle einer stückweise konstanten Funktion. Ausgehend von der Fläche eines Rechtecks erhält man z.B. für die unten skizzierte Funktion $c_1(x_1 - a) + c_2(x_2 - x_1) + c_3(b - x_2)$.



Die einfache Idee ist es daher, eine allgemeine Funktion durch stückweise konstante Funktionen, etwas allgemeiner durch Treppenfunktionen, zu approximieren.

(1) Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine **Zerlegung** Z des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche indizierte Menge

$$Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Dabei heißen x_k der k**-teTeilungspunkt** und $]x_{k-1}, x_k[$ das k**-te Teilintervall** von Z für $k = 1, \ldots, n$. Die Zerlegung Z' heißt eine **Verfeinerung** von Z, wenn $Z' \supset Z$.

(2) Definition. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn eine Zerlegung Z existiert derart, dass φ auf den Teilintervallen konstant ist, d.h.

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \; \exists \, c_k \in \mathbb{C} : \; \varphi|_{]x_{k-1}, x_k[} = c_k.$$

Dabei heißt Z eine φ-Zerlegung oder Zerlegung für φ. Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ wird mit $T[a, b]$ bezeichnet.

Bemerkungen. • Über die Werte von φ an den Teilungspunkten wird nichts vorausgesetzt.

- Es gibt viele zu φ gehörige Zerlegungen. So gehört z.B. jede Verfeinerung einer φ-Zerlegung dazu.

(3) Definition. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Dann heißt $f : X \to \mathbb{C}$ **beschränkt**, wenn $f(X)$ beschränkt ist (siehe (5.7)). Weiter sei $B(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ beschränkt}\}$ und für $f \in B(X)$ sei $\|f\|_s := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. ($\|.\|_s$ wird in der Literatur oft mit $\|.\|_\infty$ bezeichnet.)

Dann ist $B(X)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, denn für alle $f, g \in B(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f + \lambda g \in B(X)$, und $\|.\|_s$ erfüllt

- $\|f\|_s \geq 0$ und $\|f\|_s = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ — Positive Definitheit
- $\|\lambda f\|_s = |\lambda|\|f\|_s$ — Homogenität
- $\|f + g\|_s \leq \|f\|_s + \|g\|_s$ — Dreiecksungleichung

weil der Betrag auf $\mathbb{C}$ die entsprechenden Eigenschaften hat. Damit ist $\|.\|_s$ eine **Norm**, die sogenannte **Supremumsnorm** auf $B(X)$. — Allgemein definiert man: Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, dann heißt $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ eine **Norm auf** V, wenn $\|.\|$ positiv definit und homogen ist, und die Dreiecksungleichung erfüllt. $(V, \|.\|)$ heißt **normierter Raum**.

Beispiele. Normierte Räume sind

- $(\mathbb{K}, |.|)$ mit dem Betrag $|.|$
- $(B(X), \|.\|_s)$ mit der Supremumsnorm $\|.\|_s$.

(4) Lemma. *$T[a, b]$ ist ein Untervektorraum von $B[a, b] := B([a, b])$. Außerdem ist $|\varphi| \in T[a, b]$ für $\varphi \in T[a, b]$.*

Beweis. Für $\varphi \in T[a, b]$ ist $\varphi([a, b]) \subset \mathbb{C}$ ist endlich und somit beschränkt. Offensichtlich gilt $|\varphi| \in T[a, b]$. Sind φ, $\psi \in T[a, b]$ und Z_φ, Z_ψ zugehörige Zerlegungen, dann ist offenbar $Z_\varphi \cup Z_\psi$ eine Zerlegung für $\varphi + \lambda\psi$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit ist $T[a, b]$ ist ein Vektorraum. □

(5) Definition. Für $\varphi \in T[a, b]$ heißt

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \in \mathbb{C}$$

das **Integral von** φ.

Dieses ist wohldefiniert, da es nicht von der φ-Zerlegung abhängig ist: Sei Z' eine weitere φ-Zerlegung. Dann ist auch $Z \cup Z'$ ist eine φ-Zerlegung. Von Z (bzw. Z') kommt man zu $Z \cup Z'$ durch wiederholte Hinzunahme eines Teilungspunktes von Z' (bzw. Z). Es bleibt also zu zeigen: Durch Einfügen **eines** Teilungspunktes x^* ändert sich $\int_a^b \varphi(x)dx$ nicht. Sei $x^* \in]x_{k-1}, x_k[$. Dann wird $c_k(x_k - x_{k-1})$ in der Summe ersetzt durch $c_k(x^* - x_{k-1}) + c_k(x^* - x_k)$, was gleich $c_k(x_k - x_{k-1})$ ist. Also ändert sich der Summenwert nicht.

Bemerkung. $\int_a^b \varphi(x)dx$ hängt nicht von den Funktionswerten von φ an den Teilungspunkten ab. – Ändert man eine Treppenfunktion an endlich vielen Stellen ab, so bleibt sie eine Treppenfunktion und ihr Integral ändert sich nicht.

(6) Lemma. *Seien $\varphi, \psi \in T[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) $\int\limits_a^b (\varphi + \lambda\psi)(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)dx + \lambda \int\limits_a^b \psi(x)dx$ *Linearität*

(b) $\left|\int\limits_a^b \varphi(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |\varphi(x)|dx \le (b-a)\|\varphi\|_s$ *Beschränktheit*

(c) φ und ψ reellwertig mit $\varphi \le \psi$ (punktweise) $\Longrightarrow \int\limits_a^b \varphi(x)dx \le \int\limits_a^b \psi(x)dx$ *Monotonie*

Beweis. Sei Z_φ eine φ-Zerlegung und Z_ψ eine ψ-Zerlegung. Dann ist $Z := Z_\varphi \cup Z_\psi$ ist eine Zerlegung für φ, ψ, $\varphi + \lambda\psi$ und $|\varphi|$. Bezüglich Z sind (a) – (c) einfache Aussagen über Summen. □

(7) Definition. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge und $f_n : X \to \mathbb{C}$ Funktionen für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $x_0 \in X$. Dann **konvergiert** (f_n) **in** x_0, wenn $z_0 \in \mathbb{C}$ existiert mit $f_n(x_0) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$.

(b) (f_n) **konvergiert punktweise** (auf X), wenn (f_n) in jedem Punkt von X konvergiert. Demnach existiert $f : X \to \mathbb{C}$ mit

$$f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \forall x \in X.$$

Man sagt (f_n) konvergiert punktweise gegen f und schreibt $f_n \stackrel{\text{pktw}}{\longrightarrow} f$.

(c) (f_n) **konvergiert gleichmäßig**, wenn $f : X \to \mathbb{C}$ existiert derart, dass

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N\ \forall x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon.$$

Man sagt (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f und schreibt $f_n \stackrel{\text{glm}}{\longrightarrow} f$.

Offenbar sind die Limites f in (a) – (c) eindeutig und es gilt:

$$f_n \stackrel{\text{glm}}{\longrightarrow} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \stackrel{\text{pktw}}{\longrightarrow} f.$$

Die Umkehrung gilt nicht. Dazu folgendes

Beispiel. Sei $X := [0,1]$ und $f_n(x) := x^n$. Dann gilt:

$$f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Daher konvergiert (f_n) punktweise gegen f mit $f(x) := 0$ für $x \neq 1$ und $f(1) := 1$. Aber (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig, denn sonst würde (f_n) gleichmäßig gegen f konvergieren, was nicht der Fall ist, denn für $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $x_n := \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ gilt

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |x_n^n - 0| = x_n^n = \frac{1}{2} \not< \frac{1}{4} = \epsilon.$$

Wir verweilen ein wenig bei der gleichmäßigen Stetigkeit.

(8) Satz. *Seien $D \subset \mathbb{C}$ und (f_n) eine Folge in $C(D)$, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiere. Dann ist $f \in C(D)$. (In Worten heißt das, dass die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist.)*

Beweis. Sei $z_0 \in D$. Wir zeigen die Stetigkeit von f in z_0. Für jedes $z \in D$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f(z_0) - f(z)| \leq |f(z_0) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z)|. \qquad (*)$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f(z) - f_{n_0}(z)| < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall z \in D$ (weil $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$). Es existiert $\delta > 0$ derart, dass $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ (weil f_{n_0} stetig in z_0 ist). Dann folgt aus $(*)$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$: $|f(z_0) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. □

Beispiel. Wir betrachten nochmals das Beispiel nach (7): (x^n) konvergiert **nicht** gleichmäßig, da sonst der punktweise Grenzwert f mit $f(x) = 0$ für $x \neq 1$, $f(1) = 1$ nach (8) stetig wäre! Das ist eine neuer Beweis.

(9) Lemma. *Sei X eine Menge und (f_n) in $B(X)$ konvergiere gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{C}$. Dann ist $f \in B(X)$. (In Worten heißt das, dass die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge beschränkter Funktionen beschränkt ist.)*

Beweis. Weil $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$, gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|f_{n_0}(x) - f(x)| < 1$ für alle $x \in X$. Daher gilt für alle $x \in X$: $|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + \|f_{n_0}\|_s$. □

(10) Definition und Satz. Eine Folge (f_n) in $B(X)$ **konvergiert in** $B(X)$ oder ist **normkonvergent**, wenn $f \in B(X)$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_s = 0$. *Sei (f_n) eine Folge in $B(X)$. Dann ist (f_n) genau dann normkonvergent, wenn (f_n) gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Sei (f_n) gleichmäßig konvergent. Nach (7) (c) existiert $f : X \to \mathbb{C}$ derart, dass $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N\ \forall x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Offenbar gilt die Äquivalenz: $\|f_n - f\|_s \leq \epsilon \iff \forall x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Daher folgt: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N$: $\|f_n - f\|_s \leq \epsilon$. Außerdem weiß man nach (9), dass $f \in B(X)$. Damit ist (f_n) normkonvergent (gegen f). — Die Umkehrung folgt ganz ähnlich. □

(11) Definition. Regelfunktionen. $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Regelfunktion, wenn eine Folge (φ_n) in $T[a,b]$ existiert mit

$$\varphi_n \xrightarrow{\text{glm}} f.$$

$R[a,b]$ bezeichnet die Menge aller Regelfunktionen auf $[a,b]$.

Bemerkungen.

- $T[a,b] \subset R[a,b]$ (denn zu $\varphi \in T[a,b]$ betrachte man $\varphi_n := \varphi\ \forall n \in \mathbb{N}$).
- $R[a,b] \subset B[a,b]$ (nach (4) und (9)).
- (φ_n) ist normkonvergent gegen f (nach (10)). Hieraus folgt sofort:
- $f \in R[a,b] \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \varphi \in T[a,b] : \|f - \varphi\|_s < \epsilon$.

(12) Satz und Definition. Integral einer Regelfunktion. *Seien $f \in R[a,b]$ und (φ_n), (ψ_n) Folgen in $T[a,b]$ mit $\varphi_n \xrightarrow{glm} f$ und $\psi_n \xrightarrow{glm} f$. Dann existieren und sind*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx.$$

Damit ist das **Integral von** f (über $[a,b]$)

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

wohldefiniert (weil unabhängig von der approximierenden Folge von Treppenfunktionen). Man schreibt oft kurz $\int_a^b f$ oder gar nur $\int f$.

Beweis. Man bilde die Folge $(\chi_n) := (\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots)$ in $T[a,b]$. Dann sind (φ_n) und (ψ_n) Teilfolgen von (χ_n). Offenbar konvergiert (χ_n) gleichmäßig gegen f. Damit folgt für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_a^b \chi_n(x)dx - \int_a^b \chi_m(x)dx \right| \overset{(6)(a)}{=} \left| \int_a^b (\chi_n - \chi_m)(x)dx \right| \overset{(6)(b)}{\leq} (b-a)\|\chi_n - \chi_m\|_s \leq$$
$$\leq (b-a)(\|\chi_n - f\|_s + \|f - \chi_m\|_s) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $\left(\int_a^b \chi_n(x)dx\right)_n$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{C}$ und somit konvergent. Die Teilfolgen $\left(\int_a^b \varphi_n(x)dx\right)_n$ und $\left(\int_a^b \psi_n(x)dx\right)_n$ konvergieren gegen den gleichen Grenzwert. $\square$

(13) Satz. *$R[a,b]$ ist ein Untervektorraum von $B[a,b]$ mit $|f| \in R[a,b]$ für $f \in R[a,b]$. Das Integral*

$$R[a,b] \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

ist weiterhin linear, beschränkt und monoton (vgl. (6)).

Beweis. • Linearität: Seien $f,\, g \in R[a,b],\ \lambda \in \mathbb{C}$. Es existieren Folgen $(\varphi_n), (\psi_n)$ in $T[a,b]$, die normkonvergent gegen f bzw. g sind. Wegen $\|(f+\lambda g) - (\varphi_n + \lambda\psi_n)\|_s \le \|f-\varphi_n\|_s + |\lambda|\|g-\psi_n\|_s \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt daraus, dass $(\varphi_n + \lambda\psi_n)$ normkonvergent gegen $f+\lambda g$ ist. Nach (6)(a) gilt $\int(\varphi_n+\lambda\psi_n) = \int\varphi_n + \lambda\int\psi_n$, und aus (12) folgen

$$\int(\varphi_n+\lambda\psi_n) \longrightarrow \int(f+\lambda g), \qquad \int\varphi_n + \lambda\int\psi_n \longrightarrow \int f + \lambda\int g.$$

Damit gilt $\int(f+\lambda g) = \int f + \lambda\int g$.

- Beschränktheit: Da $\big|\,|\varphi_n(x)| - |f(x)|\,\big| \le |\varphi_n(x) - f(x)|$ für jedes x, folgt $\||\varphi_n| - |f|\|_s \le \|\varphi_n - f\|_s \longrightarrow 0$. Daher ist $|f| \in R[a,b]$ und $\left|\int f\right| \overset{(12)}{\longleftarrow} \left|\int\varphi_n\right| \overset{(6)(b)}{\le} \int|\varphi_n| \overset{(12)}{\longrightarrow} \int|f|$. Das beweist $\left|\int f\right| \le \int|f|$. Desweiteren gilt $\int|\varphi_n| \overset{(6)(b)}{\le} (b-a)\|\varphi_n\|_s \longrightarrow (b-a)\|f\|_s$, woraus $\int|f| \le (b-a)\|f\|_s$ folgt.

- Monotonie: Sei $f \le g$ punktweise. Setze $\tilde{\varphi}_n := \varphi_n - \|f-\varphi_n\|_s$ und $\tilde{\psi}_n := \psi_n + \|g-\psi_n\|_s$. Dafür gelten $\tilde{\varphi}_n \le f \le g \le \tilde{\psi}_n$ und $\tilde{\varphi}_n \overset{\text{glm}}{\longrightarrow} f$, $\tilde{\psi}_n \overset{\text{glm}}{\longrightarrow} g$. Mit (6)(c), (6)(a) und (12) folgt daraus $0 \le \int(\tilde{\psi}_n - \tilde{\varphi}_n) = \int\tilde{\psi}_n - \int\tilde{\varphi}_n \longrightarrow \int g - \int f$. Also ist $\int f \le \int g$.

□

(14) Satz. *Sei (f_n) in $R[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $f_n \overset{glm}{\longrightarrow} f$. Dann ist $f \in R[a,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Beweis. Nach der ersten Bemerkung zu (11), sowie nach (9) ist $f \in B[a,b]$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_{n_0} - f\|_s \le \frac{\epsilon}{2}$ (weil $\|f_n - f\|_s \to 0$). Dazu existiert $\varphi \in T[a,b]$ mit $\|f_{n_0} - \varphi\|_s < \frac{\epsilon}{2}$ (nach der letzten Bemerkung zu (11), weil $f_{n_0} \in R[a,b]$). Damit ist $\|f-\varphi\|_s \le \|f - f_{n_0}\|_s + \|f_{n_0} - \varphi\|_s < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Das zeigt nach der letzten Bemerkung zu (11), dass $f \in R[a,b]$. — Schließlich gilt $\left|\int f - \int f_n\right| \overset{(13)}{=} \left|\int(f-f_n)\right| \overset{(13)}{\le} \int|f-f_n| \overset{(13)}{\le} (b-a)\|f-f_n\|_s \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Bemerkung. In (14) kann die gleichmäßige nicht durch die punktweise Konvergenz gegen $f \in R[a,b]$ ersetzt werden. Als Beispiel dazu betrachte man die Folge (φ_n) in $T[0,1]$ mit

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ n & \text{für } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

Offenbar konvergiert (φ_n) punktweise gegen 0, aber $\int\varphi_n = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Was sind es für Funktionen in $R[a,b]$?

(15) Satz. *f ist eine Regelfunktion auf $[a,b]$ genau dann, wenn f in allen Punkten $x \in]a,b]$ einen links- und in allen Punkten $x \in [a,b[$ einen rechtsseitigen Grenzwert hat, d.h.*

$$\exists f(x-) := \lim_{t\to x, t<x} f(t) \quad \textit{bzw.} \quad \exists f(x+) := \lim_{t\to x, t>x} f(t).$$

Beweis. Sei f eine Regelfunktion. Sei $x_0 \in]a,b]$ und $\epsilon > 0$. Es existiert $\varphi \in T[a,b]$ mit $\|f-\varphi\|_s < \frac{\epsilon}{2}$ und dazu ein $\alpha \in]a, x_0[$, wofür $\varphi|_{]\alpha,x_0[}$ konstant ist (gleichgültig, ob x_0 Teilungspunkt ist oder nicht). Damit gilt für alle $t,t' \in]\alpha,x_0[$: $|f(t)-f(t')| \le |f(t)-\varphi(t)|+|\varphi(t)-\varphi(t')|+|\varphi(t')+f(t')| < \frac{\epsilon}{2}+0+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Mit dem Folgenkriterium (7.2) und dem Cauchy Kriterium (5.22) folgt daraus die Existenz von $\lim\limits_{t\to x_0, t<x_0} f(t)$. Ebenso folgt die Existenz der rechtsseitigen Grenzwerte.

Zur Umkehrung nehme man an, dass $f \notin R[a,b]$. Nach der letzten Bemerkung nach (11) existiert dann ein $\epsilon > 0$ mit $\|f-\varphi\|_s > \epsilon \; \forall \varphi \in T[a,b]$. Man definiert jetzt induktiv eine Intervallschachtelung $([a_n,b_n])$ mit $[a_n,b_n] \subset [a,b]$ und

$$\|f|_{]a_n,b_n[} - \chi\|_s > \epsilon \; \forall \chi \in T[a_n,b_n]. \tag{$*$}$$

Man beginnt mit $[a_1,b_1] := [a,b]$, was $(*)$ erfüllt . Sei $[a_n,b_n]$ bereits definiert und $M := \frac{a_n+b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n,b_n]$. Es kann nicht sein, dass sowohl $\chi_1 \in T[a_n,M]$ mit $\|f|_{[a_n,M]} - \chi_1\|_s \le \epsilon$ als auch $\chi_2 \in T[M,b_n]$ mit $\|f|_{[M,b_n]} - \chi_2\|_s \le \epsilon$ existiert, denn sonst erfüllt $\chi \in B[a_n,b_n]$ mit $\chi|_{[a_n,M]} := \chi_1$ und $\chi|_{]M,b_n]} := \chi_2$ offenbar

$$\chi \in T[a_n,b_n], \; \|f|_{[a_n,b_n]} - \chi\|_s \le \epsilon,$$

was ein Widerspruch zu $(*)$ ist. Wähle nun $[a_{n+1},b_{n+1}]$ aus $\{[a_n,M],[M,b_n]\}$, so dass $(*)$ gilt.

Sei $\{x_0\} := \bigcap_n [a_n,b_n]$. Man betrachte zunächst den Fall $x_0 \in]a,b[$. Sei $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(x)-f(x-)| < \epsilon \; \forall x_0-\delta \le x < x_0, \quad |f(x)-f(x+)| < \epsilon \; \forall x_0 \le x < x_0+\delta.$$

Dann definiert

$$\chi(x) := \begin{cases} f(x-) & \forall x \in [x_0-\delta, x_0[, \\ f(x_0) & \text{für } x = x_0, \\ f(x+) & \forall x \in]x_0, x_0+\delta]. \end{cases}$$

eine Treppenfunktion $\chi \in T[x_0-\delta, x_0+\delta]$ mit $\|f|_{[x_0-\delta,x_0+\delta]} - \chi\|_s < \epsilon$. Nun existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $[a_N,b_N] \subset [x_0-\delta,x_0+\delta]$ (weil $x_0 \in [a_n,b_n] \; \forall n$ und $b_n - a_n \to 0$) und die Treppenfunktion $\chi|_{[a_N,b_N]}$ liefert einen Widerspruch zu $(*)$. — Die Fälle $x_0 = a$ und $x_0 = b$ sind entsprechend einfacher zu beweisen. □

Man kann weiter zeigen, dass eine Regelfunktion an höchstens abzählbar vielen Stellen unstetig ist. — Im Folgenden sei $C[a,b] := C([a,b])$.

(16) Korollar. *Es gelten:*

(a) $C[a,b] \subset R[a,b]$.

(b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton* $\Longrightarrow f \in R[a,b]$.

Beweis. Man wende (15) an. □

Kurz gesagt, stetige oder monotone Funktionen auf einem kompakten Intervall sind Regelfunktionen.

Beispiele. • $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ für $x \ne 0$ und $f(0) := 0$ ist keine Regelfunktion nach (15), weil $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)$ offensichtlich nicht existiert.

- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1$ für $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) := 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ ist keine Regelfunktion nach (15), weil überhaupt kein links- oder rechtsseitiger Grenzwert existiert.
- Funktionen mit **beschränkter Variation** sind genau solche Funktionen, für die Real- und Imaginärteil jeweils die Differenz von zwei monotonen Funktionen sind. Solche Funktionen sind Regelfunktionen nach (16)(b).

(17) Satz. *Seien $a \le c < d \le b$ und $f \in R[a,b]$. Dann ist $f|_{[c,d]} \in R[c,d]$.* Man schreibt kurz $\int_c^d f$ für $\int_c^d f|_{[c,d]}$. *Ist $a < c < b$, dann gilt*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*D.i. die **Additivität des Integrals**.*

Beweis. Sei (φ_n) in $T[a,b]$ mit $\varphi_n \xrightarrow{\text{glm}} f$. Dann ist $\varphi_n|_{[c,d]} \in T[c,d]$ und $\varphi_n|_{[c,d]} \xrightarrow{\text{glm}} f|_{[c,d]}$. Daher $f|_{[c,d]} \in R[c,d]$. — Seien nun $a < c < b$ und Z_n eine Zerlegung zu $\varphi_n|_{[a,c]}$ und Z'_n eine Zerlegung zu $\varphi_n|_{[c,b]}$. Dann ist $Z_n \cup Z'_n$ eine φ_n-Zerlegung. Direkt aus der Definition (5) folgt $\int_a^b \varphi_n = \int_a^c \varphi_n + \int_c^b \varphi_n$ und hieraus mit $n \to \infty$ die Behauptung. □

Bequem für das Rechnen ist folgende

(18) Definition. Für $f \in R[a,b]$ und $c \in [a,b]$ setzt man

$$\int_b^a f := -\int_a^b f \qquad \text{und} \qquad \int_c^c f := 0.$$

(19) Satz. *Seien $f \in R[a,b]$ und $c \in [a,b]$ und definiere*

$$F : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_c^x f(t)dt.$$

Dann gilt: f stetig in $x_0 \Longrightarrow F$ differenzierbar in x_0 mit $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis. Sei $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ mit $x_0 + h \in [a,b]$. Dann gilt

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\left(\int_c^{x_0+h} f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt\right) - f(x_0) \overset{(17),(18)}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert $\delta > 0$ derart, dass $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall t \in [a,b]$ mit $|t - x_0| < \delta$ (weil f stetig in x_0 ist). Damit gilt $\forall h \neq 0$, $|h| < \delta$, $x_0 + h \in [a,b]$: $\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt\right| \le \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon\, dt\right| = \epsilon$. Also ist F differenzierbar in x_0 mit $F'(x_0) = f(x_0)$. □

(20) Definition. Seien f, $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ derart, dass F differenzierbar ist mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann heißt F **Stammfunktion** von f.

(21) Korollar. *Seien $f \in C[a,b]$ und $c \in [a,b]$. Dann ist $F : [a,b] \to \mathbb{C}$, $F(x) := \int_c^x f(t)dt$ Stammfunktion von f.*

(22) Lemma. *Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gelten:*

- *Ist $k \in \mathbb{C}$, dann ist auch $F + k$ eine Stammfunktion von f.*
- *Ist G eine weitere Stammfunktion von f, dann existiert $k \in \mathbb{C}$ mit $G = F + k$.*

Beweis.
- $(F + k)' = F' = f$.
- $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0 \Longrightarrow F - G$ konstant nach (8.17).

$\square$

(23) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI). Seien $f \in C[a,b]$ und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c) \quad \forall c, d \in [a,b].$$

Beweis. Nach (22) genügt es, die Behauptung für eine bestimmte Stammfunktion F zu zeigen. Für $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ nach (21) ergibt sich $F(d) - F(c) = \int_a^d f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \overset{(17)}{=} \int_c^d f(t)\,dt$. $\square$

Folgende Schreibweisen sind üblich: $\int\limits_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c) = F(x)\,\Big|_{x=c}^{x=d} = F\Big|_c^d$.

(24) Beispiele.

(a) Sei $x > 0$. Da $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ist z.B. $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln x|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$. Somit ist ln eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ auf $[a,b]$ für jedes $0 < a < b < \infty$. — Sei $x < 0$. Dann ist $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Also ist $x \mapsto \ln(-x)$ Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ auf $[a,b]$ für jedes $-\infty < a < b < 0$.— Zusammenfassend folgt, dass $x \to \ln|x|$ eine Stammfunktion von $x \to \frac{1}{x}$ ist auf jedem kompakten Intervall, das 0 nicht enthält.

(b) Eine Stammfunktion von x^α für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}_+$ ist $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$.

(c) Eine Stammfunktion von a^x für $a > 0$, $a \neq 1$ auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist $\frac{1}{\ln a}a^x$.

(d) Eine Stammfunktion einer rationalen Funktion erhält man mittels Partialbruchzerlegung.

$\boxed{\text{Üb}}$ Man berechne eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{1-x^4}$ und von $x \mapsto \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}$ auf $[3,4]$.

(25) Integrationstechniken.

- **Substitutionsregel.** Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f \in C(D)$ und $g \in C^1[a,b]$ mit $g([a,b]) \subset D$. Dann gilt
$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$
- **Partielle Integration.** Seien $f, g \in C^1[a,b]$. Dann gilt
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (fg)(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Beweis.
- Nach dem ZWS ist $I := g([a,b])$ ein abgeschlossenes Intervall. Sei F eine Stammfunktion von $f|_I$. Dann ist $F \circ g$ ist differenzierbar mit $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$ $\forall t \in [a,b]$. Hieraus folgt $\int_a^b f(g(t))f'(t)\,dt \overset{\text{HDI}}{=} (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) \overset{\text{HDI}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$.
- Für $F := fg \in C^1[a,b]$ ist $F' = f'g + fg'$ (Produktregel), weshalb F eine Stammfunktion von $f'g + fg'$ ist. Nach dem HDI folgt daraus $\int_a^b (f'g + fg') = F|_a^b = fg|_a^b$.

$\square$

(26) Beispiele.

1. Seien I das kompakte Intervall mit Randpunkten $\alpha a + \beta$ und $\alpha b + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f \in C(I)$. Dann gilt
$$\alpha \int_a^b f(\alpha x + \beta)\,dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,dx.$$
Das folgt aus (25) mit der Substitution $g(t) = \alpha t + \beta$.
2. **Logarithmische Ableitung.** Sei $g \in C^1[a,b]$ mit $g(t) > 0$ $\forall t \in [a,b]$. Dann gilt nach HDI
$$\int_a^b \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \ln(g(t))\Big|_{t=a}^{t=b}.$$
Ist z.B. $g(t) = \cos t$ für $t \in [a,b] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dann folgt $\int_a^b \tan t\,dt = \ln(\cos a) - \ln(\cos b)$.
3. Für $a, b > 0$ ist mittels partieller Integration $\int_a^b \ln x\,dx = \int_a^b 1 \cdot \ln x\,dx = x \ln x|_a^b - \int_a^b x\,\frac{1}{x}\,dx = (x \ln x - x)\,\Big|_a^b$. Also ist $x \ln x - x$ eine Stammfunktion von $\ln x$ auf jedem kompaktem Intervall $I \subset \mathbb{R}_+$.

4. **Integration von** $R(\sin x, \cos x)$ mit einem **rationalen Ausdruck** $R(x, y)$. Die Substitution $g(t) = 2\arctan t$, $t \in \mathbb{R}$, liefert $g'(t) = \frac{2}{1+t^2}$. Für $x \in]-\pi, \pi[$ gilt weiter $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ und $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$. Daher ist $\sin(g(t)) = \frac{2t}{1+t^2}$ und $\cos(g(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Damit gelingt die Rückführung auf die Integration einer rationalen Funktion.

Als Beispiel zu 4. berechne man $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\cos x} dx$ für $\alpha, \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ und $\alpha < \beta$. Für $a := \tan\frac{\alpha}{2}$, $b := \tan\frac{\beta}{2}$ ist $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$ und somit

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_a^b \frac{g'(t)}{\cos g(t)}\, dt = \int_a^b \frac{2}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1-t^2}\, dt = \int_a^b \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt =$$
$$(-\ln(1-t) + \ln(1+t))\,\Big|_a^b = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_a^b = \ln\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)\Big|_\alpha^\beta .$$

(27) Lemma.

(a) $\varphi, \psi \in T[a,b] \Longrightarrow \varphi\psi \in T[a,b]$.

(b) $f, g \in B[a,b] \Longrightarrow fg \in B[a,b]$ *und* $\|fg\|_s \le \|f\|_s\|g\|_s$.

(c) $f, g \in R[a,b] \Longrightarrow fg \in R[a,b]$.

Beweis. Die Aussage (b) ist einfach zu beweisen. — Zu (a) beachte man, dass man zu einer φ–Zerlegung Z und einer ψ–Zerlegung Z' mit $Z \cup Z'$ eine Zerlegung von $\varphi\psi$ erhält. — Es bleibt (c) zu zeigen. Dazu seien (φ_n) und (ψ_n) zwei Folgen von Treppenfunktionen die gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren. Nach (a) ist dann $(\varphi_n\psi_n)$ eine Folge von Treppenfunktionen, wofür mit (b) folgt: $fg - \varphi_n\psi_n = (f-\varphi_n)g + \varphi_n(g-\psi_n)$ und somit $\|fg - \varphi_n\psi_n\|_s \le \|(f-\varphi_n)g\|_s + \|\varphi_n(g-\psi_n)\|_s \le \|f-\varphi_n\|_s\|g\|_s + \|\varphi_n\|_s\|g-\psi_n\|_s \to 0$. Also konvergiert $(\varphi_n\psi_n)$ gleichmäßig gegen fg, weshalb fg eine Regelfunktion ist. $\square$

(28) Mittelwertsatz der Integralrechnung. *Seien* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mit* $p \ge 0$ *eine Regelfunktion. Dann ist* pf *nach* (27) *eine Regelfunktion und es existiert* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)p(x)\, dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\, dx.$$

In diesem Zusammenhang heißt p *eine Gewichtsfunktion. Speziell für* $p = 1$ *folgt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(\xi)$$

Beweis. Seien m und M das Minimum bzw. Maximum von f (vgl. (7.16)). Dann ist $mp \le fp \le Mp$ und somit wegen der Monotonie des Integrals $m\int_a^b p \le \int_a^b fp \le M\int_a^b p$. Also existiert $\mu \in [m, M]$ mit $\int_a^b fp = \mu\int_a^b p$. Nach dem ZWS existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$. $\square$

(29) Lemma. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Dann gilt: f stetig in $x_0 \in [a,b] \implies f(x_0) = 0$.*

Beweis. Angenommen $f(x_0) > 0$. Nach (7.4) existiert $r > 0$ mit $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ für alle $x \in I :=]x_0 - r, x_0 + r[\cap [a,b]$. Definiere $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := \frac{f(x_0)}{2}$ falls $x \in I$ und $\varphi(x) := 0$ sonst. Dann ist $\varphi \in T[a,b]$, $\varphi \leq f$ und somit $\int f \geq \int \varphi \geq \frac{f(x_0)}{2} |I| > 0$, was ein Widerspruch ist. □

Eine weitere wichtige Folgerung aus der gleichmäßigen Konvergenz ist die folgende Vertauschbarkeit von zwei Grenzprozessen.

(30) Satz. *Sei (f_n) eine Folge in $C^1[a,b]$ derart, dass $(f_n(x_0))$ für ein $x_0 \in [a,b]$ konvergiert und (f_n') gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig. Sei $f := \lim f_n$. Dann ist $f \in C^1[a,b]$ und $f' = \lim f_n'$.*

Beweis. Zunächst ist $g := \lim f_n'$ stetig nach (8). Der HDI ergibt $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt \;\forall x \in [a,b]$. Man setze $c := \lim f_n(x_0)$ und $f(x) := c + \int_{x_0}^x g(t)\,dt$. Nach (21) ist dann $f \in C^1[a,b]$ mit $f' = g$. Aus (14) folgt $\lim \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^x g(t)\,dt$. Also gilt $f_n \overset{\text{pktw}}{\longrightarrow} f$. Es gilt hierfür sogar die gleichmäßige Konvergenz:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left| c + \int_{x_0}^x g \; - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x f_n' \right| \leq |c - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x (g - f_n') \right| \\
&\leq |c - f_n(x_0)| + |x_0 - x| \|g - f_n'\|_s \leq |c - f_n(x_0)| + |b - a| \|g - f_n'\|_s,
\end{aligned}$$

weshalb $\|f - f_n\|_s \leq |c - f_n(x_0)| + |b - a| \|g - f_n'\|_s \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. □

Uneigentliche Integrale

(31) Definition. Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{C}$ derart, dass $f|_{[a,M]} \in R[a,M] \quad \forall M > a$. Dann definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{M \to \infty} \int_a^M f(x)\,dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Entsprechend wird $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ definiert.

Beispiel. Sei $\alpha > 1$. Dann ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$, denn $\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \overset{M \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha - 1}$. — Für $\alpha = 1$ ist $\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \ln M - \ln 1 = \ln M \overset{M \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Also existiert $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ nicht.

Für $f \in R[a,b]$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to b \\ c \in [a,b[}} \int_a^c f(x)\,dx,$$

denn $\left| \int_a^b f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^b f \right| \leq (b - c) \|f\|_s \overset{c \to b}{\longrightarrow} 0$. Daher handelt es sich bei folgender Definition um eine konsistente Verallgemeinerung.

(32) Definition. Sei $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ und $f|_{[a,c]} \in R[a,c]$ für alle $c \in [a,b[$. Man definiert dann das an der oberen Grenze uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)\,dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Entsprechend wird das an der unteren Stelle uneigentliche Integral definiert.

Beispiel. Sei $\alpha < 1$. Dann ist $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$, denn $\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_{x=c}^{x=1} = \frac{1-c^{1-\alpha}}{1-\alpha} \overset{c\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}$. — Für $\alpha = 1$ ist $\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln 1 - \ln c = -\ln c \overset{c\to 0}{\longrightarrow} \infty$. Also existiert $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ nicht.

In naheliegender Weise behandelt man Integrale, die an beiden Grenzen uneigentlich sind. Beispielsweise ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$, denn $\int_{M'}^{M} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \Big|_{x=M'}^{x=M} = \arctan M - \arctan M' \overset{M\to\infty, M'\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. — Beachte, dass M und M' unabhängig sein müssen. Beispielsweise ist $\int_{-M}^{M} x\,dx = 0$, aber $\int_{M'}^{M} x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=M'}^{x=M} = \frac{1}{2}(M^2 - M'^2)$ hat **keinen** Grenzwert für $M \to \infty$ und $M' \to -\infty$.

In Verallgemeinerung von (32) behandelt man endlich viele uneigentliche Stellen im Intervallinneren. Beispielsweise ist $\int_{-2}^{1} \ln|x|\,dx = 2\ln 2 - 3$, denn für $-2 < c < 0$ ist $\int_{-2}^{c} \ln|x|\,dx = \int_{-2}^{c} \ln(-x)\,dx = \int_{-c}^{2} \ln x\,dx = (x\ln x - x) \Big|_{x=-c}^{x=2} = (2\ln 2 - 2) - ((-c)\ln(-c) - (-c)) \overset{c\to 0}{\longrightarrow} 2\ln 2 - 2 - 0$, und für $0 < c' < 1$ ist $\int_{c'}^{1} \ln|x|\,dx = \int_{c'}^{1} \ln x\,dx = (x\ln x - x) \Big|_{x=c'}^{x=1} = (1\ln 1 - 1) - (c'\ln(c') - c') \overset{c'\to 0}{\longrightarrow} -1$.

(33) Lemma. *Sei $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ und $f|_{[a,M]} \in R[a,M]$ $\forall M > a$. Dann gilt:*

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^M f(x)\,dx : M > a\right\}.$$

Daher existiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$ genau dann, wenn $\sup\limits_M \int_a^M f(x)\,dx < \infty$, kurz $\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty$.

Beweis. Sei $M < M'$. Wegen der Additivität (17) und Monotonie des Integrals ist $\int_a^{M'} f(x)\,dx = \int_a^M f(x)\,dx + \int_M^{M'} f(x)\,dx \geq \int_a^M f(x)\,dx$. Hiermit folgt sofort die Behauptung. $\square$

(34) Satz. ***Majorantenkriterium für Integrale.*** *Seien $f : [a,\infty[\to \mathbb{C}$, $f|_{[a,M]} \in R[a,M]$ $\forall M > a$ und $g : [a,\infty[\to \mathbb{R}$, $g \geq 0$, $g|_{[a,M]} \in R[a,M]$ $\forall M > a$. Seien weiter $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ und $\int_a^\infty g(x)dx < \infty$. Dann existiert $\int_a^\infty f(x)dx$ und $\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$.*

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise (34).

$\boxed{\text{Üb}}$ Existieren die uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ und $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$?

(35) Satz. ***Integralkriterium.*** *Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ monoton fallend und $f \geq 0$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Insbesondere existiert $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ genau dann, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$.

Beweis. Weil f monoton ist, ist $f|_{[1,M]} \in R[1, M]$ nach (16)(b). Weiter gilt: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)\ \forall x \in [k, k+1] \Longrightarrow f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$. Daher $\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^n f(x)dx \geq \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$. Nun bildet man das Supremum bez. n. $\square$

Beispiel. Sei $s > 1$. Um $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ abzuschätzen, betrachte man $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x^s}$. Nach dem Beispiel zu (31) ist $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{s-1}$. Daher ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{s-1} \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} - 1$, woraus

$$\frac{1}{s-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \leq \frac{s}{s-1}$$

folgt. Man nennt $s \mapsto \zeta(s) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $s > 1$ die **Riemannsche Zetafunktion**.

10 Funktionen-, Potenz- und Taylorreihen

(1) Definition. Seien X eine Menge und $f_k : X \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}$ Funktionen. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ die **n-te Patialsumme**. Dann konvergiert definitionsgemäß die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **in einem Punkt** $x_0 \in X$ bzw. **punktweise (auf X)** bzw. **gleichmäßig (auf X)**, wenn die Folge (s_n) die entsprechende Eigenschaft besitzt. Vgl. Definition (9.7).

Ist (f_k) eine Folge in $B(X)$, dann ist es offenbar auch (s_n). Nach (9.10) konvergiert daher $\sum_k f_k$ gleichmäßig genau dann, wenn (s_n) in $B(X)$ konvergiert, d.h. s-normkonvergent ist. Man sagt dann, dass $\sum_k f_k$ in $B(X)$ konvergiert oder s-normkonvergent ist.

(2) Definition. Sei (f_k) eine Folge in $B(X)$. Die Reihe $\sum_k f_k$ heißt **normal konvergent (auf X)** oder **absolut konvergent in** $B(X)$, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_s < \infty.$$

Man erinnere sich: Jede absolut konvergente Reihe in $\mathbb{C}$ konvergiert in $\mathbb{C}$, siehe (6.8). In Verallgemeinerung davon folgt gemäß (3) aus der absoluten Konvergenz in $B(X)$ die Konvergenz in $B(X)$.

(3) Satz. ***Weierstraß Kriterium***. *Sei (f_k)eine Folge in $B(X)$. Dann gilt:*

$$\sum_k f_k \textit{ normal konvergent} \Longrightarrow \sum_k f_k \textit{ gleichmäßig konvergent.}$$

Beweis. Wie in (6.8) benötigt man zum Beweis die Cauchy Eigenschaft. Dazu dient die folgende Definition. In (7) erhält man dann (3) als Korollar zur absoluten Konvergenz. □

(4) Definition. Seien $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum und (x_n) eine Folge in V. Sie **konvergiert** in V, falls ein $x \in V$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Man schreibt $x = \lim_n x_n$ und nennt x den **Grenzwert von** (x_n). *Der Grenzwert ist eindeutig.* Das folgt wie in (5.2) aus der Dreiecksungleichung.

Die Folge (x_n) heißt **Cauchy-Folge (CF)**, wenn $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$ (d.h. $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N \in \mathbb{N}$: $\|x_n - x_m\| < \epsilon$). *Jede konvergente Folge ist CF.* Das folgt wie in (5.22),$\Rightarrow$.

$(V, \|.\|)$ heißt **vollständig** oder ein **Banachraum**, wenn jede CF in V konvergiert.

Beispiel. $(\mathbb{C}, |.|)$ ist ein Banachraum. Dies besagt (5.22),$\Leftarrow$.

(5) Satz. *$(B(X), \|.\|_s)$ ist ein Banachraum.*

Beweis. Sei $x \in X$. Dann gilt: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_s \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow (f_n(x))$ ist CF in $\mathbb{C}$ $\Longrightarrow (f_n(x))$ konvergiert nach (5.22),$\Leftarrow$. Sei $f(x) := \lim_n f_n(x)$.

Geht man in dieser Weise für jedes $x \in X$ vor, erhält man eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$. Hierfür sind jetzt zwei Eigenschaften zu zeigen:

1. $f \in B(X)$.
2. (f_n) konvergiert in $B(X)$ gegen f bez. der Supremumsnorm im Sinne von (4).

Für jedes $x \in X$ ist $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_s$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_s \leq \epsilon$ $\forall n, m \geq N$. Mittels Grenzübergang $m \to \infty$ folgt hieraus $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \ \forall n \geq N \ \forall x \in X$ und daher $\|f_n - f\|_s \leq \epsilon \ \forall n \geq N$. Insbesondere ist $(f_n - f) \in B(X)$ und somit $f = f_n - (f_n - f) \in B(X)$, womit alles gezeigt ist. □

(6) Definition und Satz. Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum, (x_k) eine Folge in V und $s_n := \sum_{k=0}^n x_k$ die n-te Partialsumme. Die Reihe $\sum_{k=0}^\infty x_k$ heißt **konvergent**, wenn (s_n) konvergiert. Existiert $s := \lim_n s_n$, so schreibt man $s = \sum_{k=0}^\infty x_k$ und s heißt der **Wert der Reihe**. Die Reihe $\sum_{k=0}^\infty x_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=0}^\infty \|x_k\| < \infty$. (Siehe die Spezialfälle (6.7) und (2).)

Sei $(V, \|.\|)$ ein Banchraum und $\sum_{k=0}^\infty x_k$ absolut konvergent. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^\infty x_k$.

Beweis. Wie im Spezialfall (6.8) folgt für $n > m$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung: $\|s_n - s_m\| = \|\sum_{k=m+1}^n x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^\infty \|x_k\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nach (6.3). Also ist (s_n) CF. Weil V vollständig ist, ist (s_n) konvergent. □

(7) Korollar. *Es gilt das Weierstraß Kriterium* (3).

$\boxed{\text{Üb}}$ Finde ein Beispiel einer Funktionenreihe, die gleichmäßig, aber nicht normal konvergiert.

(8) Beispiel. Sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_k(x) := \frac{e^{ikx}}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $f_k \in B(\mathbb{R})$, denn $|f_k(x)| = \frac{1}{k^2} \ \forall x$ und somit $\|f_k\|_s = \frac{1}{k^2}$. Weiter ist $\sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_s = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty$, weshalb $\sum_{k=1}^\infty f_k$ normal konvergent auf $\mathbb{R}$ ist. Also konvergiert $\sum_{k=1}^\infty \frac{e^{ik(.)}}{k^2}$ gleichmäßig nach (3).

(9) Korollar. *Sei (f_k) eine Folge in $C^1[a,b]$ derart, dass $\sum_k f_k(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$ konvergiert und $\sum_k f_k'$ normal oder –allgemeiner– gleichmäßig konvergiert. Dann konvergiert $\sum_k f_k$ gleichmäßig. Ist $f := \sum_k f_k$, dann ist $f \in C^1[a,b]$ und $f' = \sum_k f_k'$.*

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise das Korollar mit Hilfe von (9.30).

Potenzreihen

(10) Definition. Sei (c_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (*)$$

Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$ mit Entwicklungspunkt a bzw. um a mit Koeffizienten c_k.

Bemerkung. Jede Potenzreihe konvergiert mindestens für $z = a$ (gegen c_0).

Beispiele. (a) $\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ ist eine Potenzreihe um $a = 0$ mit Koeffizienten $c_k = \frac{1}{k!}$. Sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist $e^z = e^a e^{z-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!}(z-a)^k$ eine Potenzreihe um a mit Koeffizienten $c_k = \frac{e^a}{k!}$, die für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

(b) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist eine Potenzreihe um $a = 0$ mit Koeffizienten $c_k = 1$, die für alle $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ gegen $\frac{1}{1-z}$ konvergiert. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ divergiert die Reihe, da (z^k) keine Nullfolge ist.

Die Frage ist, was man über die Konvergenz der Potenzreihe $(*)$ im Allgemeinen sagen kann. Zur Erinnerung ist $U_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ die offene Kreisscheibe um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ und $\overline{U_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$.

(11) Satz. *Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$. Sei $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ derart, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1-a)^k$ konvergiert. Dann ist $r := |z_1 - a| > 0$ und*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (a)$$

konvergiert absolut für jedes $z \in U_r(a)$. Also ist $f := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(.-a)^k$ eine auf $U_r(a)$ definierte Funktion mit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$. Sei nun $\rho \in]0, r[$. Dann konvergieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (.-a)^k \qquad (b)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} k c_k (.-a)^{k-1} \qquad (c)$$

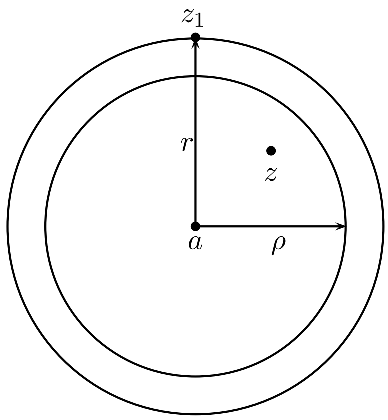
normal auf $\overline{U_\rho(a)}$ und damit gleichmäßig nach (3).

Beweis. Setze $f_k(z) := c_k(z-a)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z_1)$ konvergent ist, folgt mit (6.3)(ii), dass $(f_k(z_1))_k$ eine Nullfolge und daher insbesondere beschränkt ist. Sei $|f_k(z_1)| \leq M$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Daher gilt $\forall k \geq 0$, $z \in \overline{U_\rho(a)}$:

$$|f_k(z)| = |f_k(z_1)| \frac{|f_k(z)|}{|f_k(z_1)|} = |f_k(z_1)| \frac{|z-a|^k}{|z_1-a|^k} \leq M \underbrace{\left(\frac{\rho}{r}\right)}_{<1}^k.$$

Bezeichne $\|f_k\|_{\overline{U_\rho(a)}} := \sup\{f_k(z) : z \in \overline{U_\rho(a)}$ die Supremumsnorm von f_k auf $\overline{U_\rho(a)}$. Da $\|f_k\|_{\overline{U_\rho(a)}} \leq M \left(\frac{\rho}{r}\right)^k$ folgt: $\sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_{\overline{U_\rho(a)}} \leq M \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\rho}{r}\right)^k = \frac{M}{1-\frac{\rho}{r}} < \infty$. Damit gilt (b).

Weil (b) für alle $0 < \rho < r$ gilt, gilt auch (a):



Zu $z \in U_r(a)$ wähle $\rho \in]|z-a|, r[$.
Damit ist $z \in U_\rho(a)$.

Es bleibt (c) zu zeigen: Setze $g_k(z) := kc_k(z-a)^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wie oben folgt $\|g_k\|_{\overline{U_\rho(a)}} \leq k\frac{M}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k-1}$. Also ist $\sum_{k=1}^\infty \|g_k\|_{\overline{U_\rho(a)}} \leq \frac{M}{r}\sum_{k=1}^\infty k\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k-1} < \infty$ nach dem Quotientenkriterium, denn $\frac{(k+1)\left(\frac{\rho}{r}\right)^k}{k\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k-1}} = \frac{k+1}{k}\left(\frac{\rho}{r}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\rho}{r} < 1$. $\square$

(12) Definition. Konvergenzradius. Sei $\sum_{k=0}^\infty c_k(z-a)^k$ eine Potenzreihe. Dann heißt

$$R := \sup\left\{|z-a| : z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^\infty c_k(z-a)^k \text{ konvergiert}\right\}$$

der **Konvergenzradius** (KR) obiger Potenzreihe.

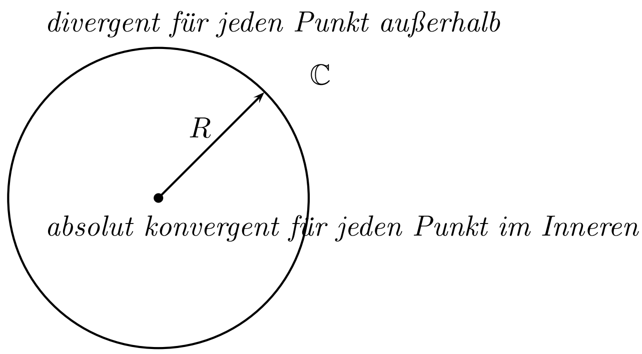
Bemerkung.

- Ist der KR$=0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $z=a$.
- Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty k!z^k$ hat KR$=0$, weil $(k!z^k)_k$ nur für $z=0$ beschränkt ist.
- Ist der KR$=\infty$, so konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$.
- Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$ hat KR$=\infty$, weil sie für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.
- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^\infty z^k$ hat KR$=1$ nach obigem Beispiel (b).

(13) Satz. *Sei $R > 0$ der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^\infty c_k(z-a)^k$ und $U_\infty(a) := \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^\infty c_k(z-a)^k \tag{a}$$

ist absolut konvergent für jedes $z \in U_R(a)$ und divergiert für jedes $z \notin \overline{U_R(a)}$. (Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| = R$ läßt sich im Allgemeinen nichts sagen.)



Weiter ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(. - a)^k \tag{b}$$

normal konvergent auf $\overline{U_r(a)}$ *für jedes* $0 \leq r < R$.

Die durch gliedweises Differenzieren entstehenden Potenzreihen

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-a)^{k-1} \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(z-a)^k \right), \\ &\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-a)^{k-2} \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}(z-a)^k \right), \end{aligned} \tag{c}$$

u.s.w. haben alle den gleichen Konvergenzradius R.

Schließlich ist die Funktion

$$f : U_R(a) \to \mathbb{C},\ f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \tag{d}$$

beliebig oft differenzierbar mit

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)c_k(z-a)^{k-n},$$

wofür der Konvergenzradius für jedes $n \in \mathbb{N}$ *gleich R ist. Insbesondere erhält man die Ableitung durch gliedweises Differenzieren und es gilt für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*:*

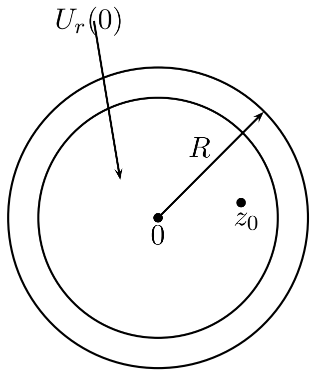
$$\boxed{f^{(n)}(a) = n!\, c_n}$$

Beweis. Die Teilaussagen (a), (b) und (c) folgen sofort aus (11) und (12). Zu (d) genügt es den Fall $n = 1$ zu betrachten. Für $n > 1$ folgt die Aussage durch wiederholte Anwendung des Falles $n = 1$.

Sei $h : U_R(0) \to \mathbb{C},\ h(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Es genügt zu zeigen, dass h differenzierbar ist mit

$$h'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1},$$

denn $f(z) = h(z-a)$. Sei $g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1}$ für $z \in U_R(0)$, $z_0 \in U_R(0)$ und wähle $r \in]|z_0|, R[$.



Für $z \in U_r(0)$ gilt:

$$\left|\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \underbrace{\left|\frac{z^k - z_0^k}{z-z_0} - k z_0^{k-1}\right|}_{\overset{\text{s.u.}}{\leq} |z-z_0| \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2}} \leq$$

$$\leq |z-z_0| \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} |c_k| k(k-1) r^{k-2}}_{<\infty \text{ nach (c) und (a)}} \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

Es bleibt obige Abschätzung zu zeigen. Für $k \geq 2$ ist

$$\left|\frac{z^k - z_0^k}{z-z_0} - k z_0^{k-1}\right| = \left|\left(\sum_{\kappa=0}^{k-1} z^\kappa z_0^{k-1-\kappa}\right) - k z_0^{k-1}\right| = \left|\sum_{\kappa=0}^{k-1} (z^\kappa - z_0^\kappa) z_0^{k-1-\kappa}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\kappa=1}^{k-1} r^{k-1-\kappa} |z^\kappa - z_0^\kappa| = \sum_{\kappa=1}^{k-1} r^{k-1-\kappa} |z-z_0| \left|\sum_{l=0}^{\kappa-1} z^l z_0^{\kappa-1-l}\right| \leq$$

$$\leq |z-z_0| \sum_{\kappa=1}^{k-1} r^{k-1-\kappa} \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\kappa-1} r^{\kappa-1}\right)}_{\kappa\cdot r^{\kappa-1}} = |z-z_0| \left|\sum_{\kappa=1}^{k-1} \kappa r^{k-2}\right| =$$

$$= |z-z_0| r^{k-2} \frac{(k-1)k}{2}.$$

□

(14) Beispiel.

(1) Differenziert man die Exponentialreihe, so ergibt sich

$$\exp'(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp(z).$$

(2) Differenzieren der geometrischen Reihe ergibt

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}.$$

Also ist

$$\boxed{\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k}$$

Hieraus folgt z.B. $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Seien a, $b \in \mathbb{C}$. Entwickle $\frac{1}{z-b}$ in eine Potenzreihe um a und bestimme deren Konvergenzradius.

(15) Wurzelkriterium. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ und $s := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s < 1 &\implies \text{Reihe konvergiert;} \\ s > 1 &\implies \text{Reihe divergiert.} \end{aligned}$$

Beweis. Sei $s > 1$. Dann existieren unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| > 1$. Damit ist (a_k) keine Nullfolge und die Reihe divergiert.

Sei $s < 1$. Wähle $q \in]s, 1[$. Dazu existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} < q \ \forall k \geq N$, d.h. $|a_k| < q^k \ \forall k \geq N$. Damit ist $\sum_{k\geq N} q^k$ eine Majorante, die wegen $q < 1$ konvergiert. Somit konvergiert auch die Reihe. □

(16) Formel für den Konvergenzradius. Sei $\sum_k c_k(z-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

(Dabei ist $R = \infty$, falls $\limsup \ldots = 0$ und $R = 0$, falls $\limsup \ldots = \infty$.)

Beweis. Folgt sofort aus dem Wurzelkriterium (15), weil

$$s < 1 \iff |z-a| < (\limsup_k \sqrt[k]{|c_k|})^{-1}, \qquad s > 1 \iff |z-a| > (\limsup_k \sqrt[k]{|c_k|})^{-1}.$$

□

Taylorreihen

Wir erinnern, dass jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ auf der offenen Kreisscheibe um a mit Radius R eine Funktion

$$f : U_R(a) \to \mathbb{C},\ f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

definiert. Für diese Funktion gilt $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \ \forall k \in \mathbb{N}_0$, siehe (13). Also ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \quad \forall z \in U_R(a).$$

(17) Definition. Taylorreihe. Sei $a \in I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^\infty(I)$. Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)(a)}}{k!}(z-a)^k$$

habe einen **positiven** Konvergenzradius R. Dann heißt

$$T_{f,a} :]a-R, a+R[\to \mathbb{C}, \ T_{f,a}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die **Taylorreihe** von f mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. (a) $T_{f,a}$ ist nur definiert, wenn der Konvergenzradius positiv ist.

(b) Die Funktion $U_R(a) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ ist die Fortsetzung von $T_{f,a}$ auf $U_R(a)$. Sie ist beliebig oft differenzierbar und wird weiterhin mit $T_{f,a}$ bezeichnet.

(c) Was hat $T_{f,a}$ mit f zu tun?

- Nach einem **Lemma von E. Borel** existiert zu jeder vorgegebenen Folge (c_k) in $\mathbb{C}$ ein $f \in C^\infty(I)$ mit
$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = c_k \ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$
Wenn also $\sum_k c_k(z-a)^k$ den Konvergenzradius 0 hat, dann existiert $T_{f,a}$ gar nicht.
- Man zeige, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
beliebig oft differenzierbar ist mit $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Damit ist $T_{f,0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_{f,0} = 0$, obwohl $f(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$.
- Ist $\sum_k c_k(z-a)^k$ eine Potenzreihe um $a \in \mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und $f(x) := \sum_k c_k(x-a)^k \ \forall x \in]a-R, a+R[$, dann ist
$$\boxed{T_{f,a} = f}$$

Weitere Untersuchungen zum Zusammenhang von f und $T_{f,a}$ folgen.

Taylorreihenentwicklung

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

(18) Definition. Taylorpolynom. Sei $f \in C^n(I)$. Dann heißt

$$T_{f,a}^n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das n**-te Taylorpolynom von** f **in** a.

(19) Satz. ***Taylorapproximation, Restglied nach Cauchy.*** *Sei $f \in C^{n+1}(I)$. Dann gilt*

$$f(x) = T^n_{f,a}(x) + R_{n+1}(x,a) \quad \forall x \in I$$

mit dem $(n+1)$-ten ***Restglied***

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt in der Tat nach dem HDI, dass $f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + \frac{1}{0!}\int_a^x 1 \cdot f'(t)dt$. — Es folgt der Induktionsschritt $n \to n+1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $f(x) = T^{n-1}_{f,a}(x) + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt}_{=R_n(x,a)}$.

Mit Hilfe partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} R_n(x,a) &= \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{1}{n}(x-t)^n f^{(n)}(t)dt \,\Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x \left(-\frac{1}{n}\right)(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right] = \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}_{=R_{n+1}(x)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

(20) Satz. ***Restglied nach Lagrange.*** *Sei $f \in C^{n+1}(I)$ reellwertig. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein ξ zwischen a und x mit*

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Beweis. Nach (19) ist $R_{n+1}(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. Da $(x-t)^n$ auf dem Integrationsbereich das Vorzeichen nicht wechselt und $f^{(n+1)}$ stetig ist, ist der MWS der Intergralrechnung (9.28) anwendbar, was die Behauptung ergibt. □

(21) Korollar. *Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und es gelte $f^{(n+1)}(x) = 0 \ \forall x \in I$. Dann ist f ein Polynom, nämlich*

$$\boxed{f = T^n_{f,a}}$$

(22) Korollar. *Sei $f \in C^{n+1}(I)$. Dann ist*

$$f(x) = T^{n+1}_{f,a}(x) + r_{n+1}(x,a)(x-a)^{n+1} \ \text{ mit } r_{n+1}(x,a) \xrightarrow{x \to a} 0.$$

Beweis. Offenbar ist $r_{n+1}(x,a) =$

$$\frac{\left[R_{n+1}(x,a) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right]}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{n!(x-a)} \int_a^x \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^n \left(f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)\right) dt.$$

Da $\mid \frac{x-t}{x-a} \mid^n \leq 1$, folgt hieraus $|r_{n+1}(x,a)| \leq \frac{1}{n!|x-a|} \; |x-a| \sup_t \mid f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a) \mid \to 0$ für $x \to a$, weil $f^{(n+1)}$ stetig ist. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Als Anwendung von (22) zeige man: Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^2(I)$ und a ein lokales Minimum von f. Dann ist $f'(a) = 0$ und $f''(a) \geq 0$. Vgl. (8.20).

(23) Korollar. *Sei $f \in C^\infty(I)$.*

(a) Sei $x_0 \in I$. Dann gilt: $\quad R_{n+1}(x_0,a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff f(x_0) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x_0-a)^k.$

(b) Seien $A, B \geq 0$ mit $|f^{(n)}(x)| \leq AB^n \; \forall x \in I \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$R_n(x,a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; \forall x \in I$$

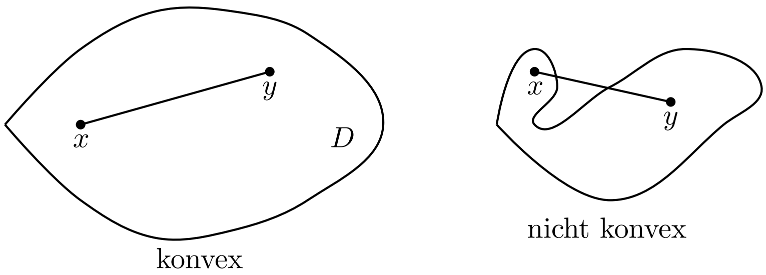
und $T_{f,a}$ stellt f auf I dar.

Beweis. (a) ist klar. — (b) $|R_{n+1}(x,a)| \leq \frac{1}{n!}\int_a^x |(x-t)^n f^{(n+1)}(t)| dt \leq \frac{1}{n!}AB^{n+1} \left| \int_a^x (x-t)^n dt \right| = \frac{1}{(n+1)!}AB^{n+1}|x-a|^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wendet man nun (a) an, so folgt die Behauptung. □

11 Konvexe Funktionen

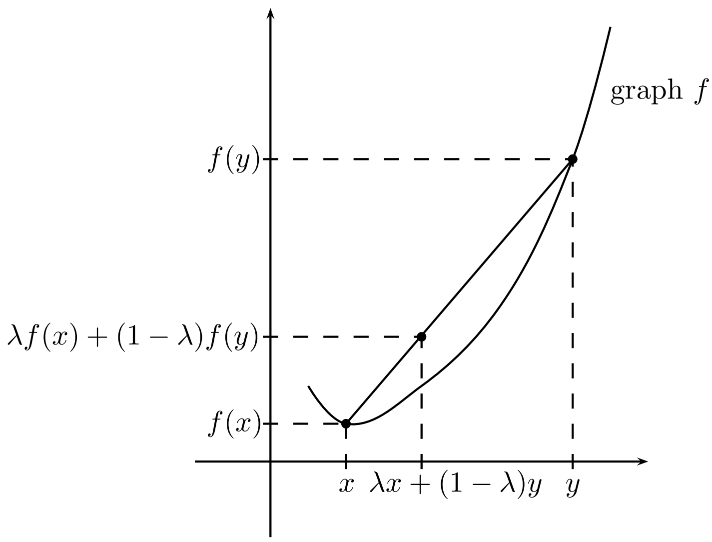
(1) Definition. Konvexe Menge, Konvexe Funktion. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $D \subset V$. D heißt **konvex**, wenn

$$\forall x, y \in D \ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \in D.$$



Ist D konvex, dann heißt $f : D \to \mathbb{R}$ **konvex**, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x, y \in D, \ \lambda \in [0,1].$$



Beispiel. Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist konvex.— Jeder Vektorraum V ist konvex. Ist V normiert, so ist die Norm $\|.\|$ auf V konvex. Allgemeiner ist für alle $a \in V$ die Abbildung $f : V \to \mathbb{R}, \ f(x) := \|x - a\|$ konvex.

(2) Lemma. *Sei D konvex, $f : D \to \mathbb{R}$ konvex, $x_1, \ldots, x_n \in D$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in D$ und $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.*

$\boxed{\text{Üb}}$ Beweise (2).

(3) Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann gilt:*

$$f \text{ konvex } \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I.$$

Beweis. "$\Longleftarrow$": Aus (8.19) folgt: $f' : I \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend. Zu $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $\lambda \in]0,1[$ sei

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2.$$

Nach den MWS existieren $\xi_1 \in]x_1, x[$, $\xi_2 \in]x, x_2[$ mit $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Wegen $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$, $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$ folgt hieraus $\frac{f(x)-f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{\lambda}$, was die Behauptung $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ ergibt.

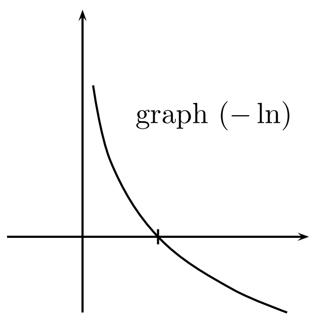
"$\Longrightarrow$": Sei $x_0 \in I$ fest, aber beliebig. Für $x \in I$, $x > x_0$ und $\lambda \in]0,1[$ gilt:

$$\underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda)x_0)}_{f(x_0+\lambda(x-x_0))} \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x_0).$$

Hiermit folgt: $\lambda(f(x)-f(x_0)) \geq f(x_0+\lambda(x-x_0))-f(x_0) \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_0+\lambda(x-x_0))-f(x_0)}{\lambda(x-x_0)} \xrightarrow{\lambda\to 0} f'(x_0)$; $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{MWS}{=} f'(\xi)$ für ein $\xi \in]x_0, x[\Longrightarrow f'(\xi) - f'(x_0) \geq 0 \Longrightarrow \frac{f'(\xi)-f'(x_0)}{\xi - x_0} \geq 0$. Aus $x \to x_0$ folgt $\xi \to x_0$ und somit $f''(x_0) \geq 0$. $\square$

(4) Satz. *Seien $x_i \in]0,\infty[$, $\lambda_i \in [0,1]$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann ist $\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.*

Beweis. $-\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist konvex nach (3), denn $-\ln'' x = \frac{1}{x^2} > 0 \ \forall x$.



Aus Lemma (2) für $f = -\ln$ folgt: $\ln\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \geq \sum_i \lambda_i \ln x_i = \sum_i \ln x_i^{\lambda_i} \Longrightarrow \sum_i \lambda_i x_i \geq e^{\sum_i \ln x_i^{\lambda_i}} = \prod_i x_i^{\lambda_i}$. $\square$

(5) Satz. ***Young Ungleichung.*** *Seien $p, q \in]1,\infty[$ mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\forall x, y \geq 0$:*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Beweis. Seien o.E. $x, y > 0$. Dann ergibt (4) für $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = x^p$ und $x_2 = y^q$: $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Das ist die Behauptung. $\square$

(6) Definition. p-Norm. Für $p \in [1, \infty[$ und $z := (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ sei $\|z\|_p := (\sum_{i=1}^n |z_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Wir zeigen, dass $\|.\|_p$ tatsächlich eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ ist, d.h. dass

- $\|z\|_p \geq 0,\ \|z\|_p = 0 \Longleftrightarrow z = 0$ positiv definit
- $\|\alpha z\|_p = |\alpha| \|z\|_p\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ positiv homogen
- $\|z + z'\|_p \leq \|z\|_p + \|z'\|_p$ Dreiecksungleichung

gelten. Offenbar sind die beiden ersten Eigenschaften erfüllt und es bleibt nur die Dreiecksungleichung zu zeigen, die hier **Minkowski Ungleichung** (9) heißt.

Wir identifizieren $B(\{1, \ldots, n\})$ mit $\mathbb{C}^n$. Die Supremumsnorm $\|z\|_s = \max\limits_{\imath=1,\ldots,n} |z_i|$ wird im Folgenden auch mit $\|z\|_\infty$ bezeichnet.

(7) Höldersche Ungleichung. Seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oder $p = 1$, $q = \infty$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n |z_i w_i| \leq \|z\|_p \|w\|_q \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis. Zuerst sei $p = 1$, $q = \infty$: $\sum_{i=1}^n \underbrace{|z_i w_i|}_{=|z_i||w_i|} \leq \sum_i |z_i| \|w\|_\infty = \|z\|_1 \|w\|_\infty$.

Jetzt seien $p, q \in]1, \infty[$ und o.E. $z \neq 0$, $w \neq 0$. Dann sind $\|z\|_p > 0$, $\|w\|_q > 0$ und mit (5) folgt: $\frac{|z_i|}{\|z\|_p} \cdot \frac{|w_i|}{\|w\|_q} \leq \frac{|z_i|^p}{p\|z\|_p^p} + \frac{|w_i|^q}{q\|w\|_q^q}\ \forall i$. Summation über i liefert: $\frac{1}{\|z\|_p} \frac{1}{\|w\|_q} \sum_i |z_i||w_i| \leq \frac{1}{p\|z\|_p^p} \sum_i |z_i|^p + \frac{1}{q\|w\|_q^q} \sum_i |w_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\square$

(8) Spezialfall Cauchy-Schwarz Ungleichung. Der $\mathbb{K}^n$ wird mit dem Standardskalarprodukt (was im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Euklidsches Skalarprodukt heißt) versehen:

$$\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i\ \forall z, w \in \mathbb{K}^n.$$

Die Hölder Ungleichung für $p = q = 2$ heißt Cauchy-Schwarz Ungleichung. Sie lautet $|\langle z, w \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |z_i||w_i| \leq \|z\|_2 \|w\|_2$, also

$$|\langle z, w \rangle| \leq \|z\|_2 \|w\|_2.$$

(9) Minkowski Ungleichung. Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gilt:

$$\|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p\ \forall z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis. Sei $p = 1$. Dann ergibt die gewöhnliche Dreiecksungleichung $\|z+w\|_1 = \sum_i |z_i + w_i| \leq \sum_i(|z_i| + |w_i|) = \|z\|_1 + \|w\|_1$. — Im Fall $p = \infty$ handelt es sich um die Dreiecksungleichung für die Supremumsnorm. — Sei nun $p \in]1, \infty[$. Bestimme $q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und setze $a_i := |z_i + w_i|^{p-1}$ für $i = 1, \ldots, n$. Mit der Hölderungleichung folgt: $\|z+w\|_p^p = \sum_i |z_i + w_i|^p = \sum_i |z_i + w_i| a_i \leq \sum_i |z_i a_i| + \sum_i |w_i a_i| \leq \|z\|_p \|a\|_q + \|w\|_p \|a\|_q$. Wegen $(p-1)q = p$ gilt außerdem: $\|a\|_q = (\sum_i a_i^q)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_i |z_i + w_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = (\sum_i |z_i + w_i|^p)^{1-\frac{1}{p}} = (\|z+w\|_p^p)^{1-\frac{1}{p}} = \|z+w\|_p^{p-1}$. Deshalb ist $\|z+w\|_p^p \leq (\|z\|_p + \|w\|_p)\|z+w\|_p^{p-1}$. Daraus folgt die Behauptung. □

Damit sind $(\mathbb{C}^n, \|.\|_p)$ und $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ normierte Räume für $p \in [1, \infty]$.

Abschließend folgt ein Lemma zur Konvexität von Urbildern unter konvexen Abbildungen.

(10) Lemma. *Seien V ein Vektorraum, $D \subset V$ konvex, $f : D \to \mathbb{R}$ konvex und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind*

$$\begin{aligned} \{x \in D : f(x) < \alpha\} &= f^{-1}(]-\infty, \alpha[), \\ \{x \in D : f(x) \leq \alpha\} &= f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \end{aligned}$$

konvex.

Beweis. Seien $\lambda \in [0, 1]$ und $x, y \in f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ bzw. $\in f^{-1}(]-\infty, \alpha])$. Dann gilt $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \overset{(\leq)}{<} \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$. □

(11) Korollar. *Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum. Dann ist die offene (bzw. abgeschlossene) Kugel $\{x \in V : \|x - a\| \overset{(\leq)}{<} \rho\}$ um $a \in V$ mit Radius $\rho > 0$ konvex.*