....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 3 für Physiker
(Analysis 2)

Prof. Dr. D. Castrigiano

3. August 2010, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **83 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Fourierreihen** **(12 Punkte)**

Sei f 2π-periodisch mit $f(t) = t^2$ für $t \in [-\pi, \pi[$.

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$ von f.

(b) Die Fourierreihe von f an der Stelle t ist $Sf(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$. Begründen Sie kurz, warum folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) Sf konvergiert gleichmäßig auf jedem Kompaktum.

> wahr wegen (ii), bzw. weil f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.

(ii) Sf konvergiert gleichmäßig.

> wahr wegen (iv), bzw. weil f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.

(iii) $Sf(t)$ konvergiert absolut für jedes t.

> wahr wegen (iv), bzw. weil $\frac{2}{k^2}$ eine integrierbare Majorante von $Sf(t)$ für jedes t ist.

(iv) Sf konvergiert normal.

> wahr, weil $\frac{2}{k^2}$ eine integrierbare Majorante von Sf, unabhängig von t, ist.

LÖSUNG:

(a) $$\hat{f}_k \overset{[1]}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \overset{[2]}{=} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left[t^2 \frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt \overset{[1]}{=} -\frac{1}{2\pi} \left[2t \frac{e^{-ikt}}{-k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 2 \frac{e^{-ikt}}{-k^2} dt}_{=0}$$

$$\overset{[1]}{=} \frac{1}{\pi k^2} \left(\pi(-1)^k - (-\pi)(-1)^k\right) \overset{[1]}{=} \frac{2(-1)^k}{k^2} \text{ für } k \neq 0.$$

Außerdem ist $\hat{f}_0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [\frac{t^3}{3}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$.

(b) s.o.

2. **Matrixexponential** **(10 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 zu den Eigenvektoren $b_1 = \binom{2}{1}$ und $b_2 = \binom{2}{-1}$ von A an.

$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = -2$

(b) Berechnen Sie damit das Matrixexponential e^{tA} (Rechenweg wird gewertet).

(c) Wie lautet die Lösung der AWA $y' = Ay$, $y(1) = \binom{0}{1}$?

LÖSUNG:

(a) $Ab_1 = \binom{4}{2} = 2b_1$, $Ab_2 = \binom{-4}{2} = -2b_2$

(b) Mit $B = (b_1\ b_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned}
e^{tA} &\overset{[1]}{=} Be^{t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} B^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&\overset{[2]}{=} -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 2e^{-2t} \\ e^{2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\overset{[1]}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t}) & e^{2t} - e^{-2t} \\ \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) & \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t}) \end{pmatrix} \\
&\overset{[1]}{=} \begin{pmatrix} \cosh 2t & 2\sinh 2t \\ \frac{1}{2}\sinh 2t & \cosh 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) $y(t) = e^{(t-1)A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sinh 2(t-1) \\ \cosh 2(t-1) \end{pmatrix}$.

3. **Komposition Lipschitz-stetiger Funktionen** **(9 Punkte)**
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Funktionen $f, g : X \to X$ seinen Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L bzw. M.

(a) Man zeige: $f \circ g$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante LM.

(b) Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $f \circ g$ eine Kontraktion ist.

$LM < 1$

(c) Man gebe konkret einen metrischen Raum (X, d) und zwei Funktionen $f, g : X \to X$ an, die kleinstmögliche Lipschitz-Konstanten $L = M = 2$ haben, für die $f \circ g$ eine Kontraktion ist.

LÖSUNG:

(a) Es gilt $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ und $d(g(x), g(y)) \leq Md(x, y)$ für alle $x, y \in X$.
Somit ist

$$d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) \leq Ld(g(x), g(y)) \leq LMd(x, y),$$

d.h. $f \circ g$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante LM.

(b) $f \circ g$ ist eine Kontraktion, wenn eine Lipschitz-Konstante < 1 angegeben werden kann.

(c) $(X, d) = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_2)$, $f : (x, y) = (2x, 0)$, $g(x, y) = (0, 2y)$.

$$f \circ g(x, y) = (0, 0)$$

ist offenbar Kontraktion (Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 0).

Anderes Beispiel: $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, $f(x) = \max\{2x, 0\}$, $g(x) = \max\{-2x, 0\}$.

4. **Differenzierbarkeit** **(12 Punkte)**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Sei $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$. Man berechne

$\partial_v f(0) = \frac{1}{2}$	$\partial_1 f(0) = 0$	$\partial_2 f(0) = 0$

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.

LÖSUNG:

(a) Die Richtungsableitung von f im Ursprung in Richtung v ist

$$\partial_v f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{t^3}{tt^2(1+1)} - 0 \right) = \frac{1}{2}.$$

Wegen $f(x,0) = 0$ ist $\partial_x f(0,0) = 0$ und wegen $f(0,y) = 0$ ist $\partial_y f(0,0) = 0$

(b) Für $(x,y) \neq 0$ ist

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

f ist also im Nullpunkt Lipschitz-stetig mit Konstante 1 und damit stetig .

(c) Es ist $\operatorname{grad} f(0) = (\partial_1 f(0), \partial_2 f(0)) = (0,0)$ wegen (a).
Wäre f bei 0 total differenzierbar, so könnte man die Kettenregel anwenden.
Somit hätte man

$$\partial_v f(0) = \tfrac{d}{dt} f(t,t) \overset{\text{Kettenregel}}{=} \langle \operatorname{grad} f(0), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0,$$

im Widerspruch zu (a).

5. **Taylor-Formel** **(10 Punkte)**

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$ mit

$$f(0) = 3, \quad \partial_1^2 f(0) = \partial_1\partial_2 f(0) = \partial_2\partial_1 f(0) = -2, \quad \partial_2^3 f(0) = \partial_1^2\partial_2 f(0) = \partial_1\partial_2\partial_1 f(0) = \partial_2\partial_1^2 f(0) = 1.$$

Alle nicht angegebenen ersten, zweiten und dritten partiellen Ableitungen sind im Nullpunkt gleich 0.

(a) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von f im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

$$\boxed{f(x,y) = 3 - x^2 - 2xy + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}x^2 y \qquad +R_4(x,y)}$$

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ kann man $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_4(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^k} = 0$ folgern?

☒ $k = 0$ ☒ $k = 1$ ☒ $k = 2$ ☒ $k = 3$ ☐ $k = 4$ ☐ $k = 5$

(c) Wie lautet die Taylorentwicklung von $g(t) = f(5t, t)$ bis zur dritten Ordnung in t im Entwicklungspunkt 0 explizit?

$$\boxed{g(t) = 3 - 35t^2 + \frac{38}{3}t^3 \qquad +R_4(t)}$$

LÖSUNG:

(a) $f(x,y) = \sum\limits_{\substack{\nu\in\mathbb{N}_0^2 \\ |\nu|\le 3}} \frac{\partial^\nu f(0,0)}{\nu!} x^{\nu_1} y^{\nu_2} = f(0) + \frac{\partial_1^2 f(0)}{2!0!}x^2 + \frac{\partial_1\partial_2 f(0)}{1!1!}xy + \frac{\partial_2^3 f(0)}{0!3!}y^3 + \frac{\partial_1^2\partial_2 f(0)}{2!1!}x^2 y + R_4(x,y).$

(b) Nach dem Satz von Taylor ist $R_4(x,y) = o(|(x,y)|^3)$. D.h., $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_4(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^k} = 0$ für $k = 3$ und damit auch für $k \le 3$.

(c) $g(t) = f(5t,t) = 3 - 25t^2 - 10t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{25}{2}t^3 + \tilde{R}_4(t) = 3 - 35t^2 + \frac{38}{3}t^3 + R_4(t).$

6. **Implizit definierte Funktionen** **(8 Punkte)**

Sei $f(x,y,z) = xz - e^{yz-x}$ und $P = (2,4,\frac{1}{2})$. Es gilt $f(P) = 0$. Die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ soll in einer Umgebung des Punktes P lokal nach z aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(x,y) \mapsto \tilde{z}(x,y)$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x,y,z)$.

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z + e^{yz-x} \\ -ze^{yz-x} \\ x - ye^{yz-x} \end{pmatrix}$$

(b) Wie lautet die Formel für $\operatorname{grad} \tilde{z}(x,y)$ für (x,y) aus dem Definitionsbereich von $\tilde{z}$?

$$\operatorname{grad} \tilde{z}(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial_x f(x,y,\tilde{z}(x,y))}{\partial_z f(x,y,\tilde{z}(x,y))} \\ -\dfrac{\partial_y f(x,y,\tilde{z}(x,y))}{\partial_z f(x,y,\tilde{z}(x,y))} \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie $\operatorname{grad} \tilde{z}(2,4)$.

$$\partial_x \tilde{z}(2,4) = \frac{3}{4}$$

$$\partial_y \tilde{z}(2,4) = -\frac{1}{4}$$

LÖSUNG:

(a) Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (z + e^{yz-x}, -ze^{yz-x}, x - ye^{yz-x}).$$

(b) s.o.

(c) Zunächst ist $f(2,4,\frac{1}{2}) = 0$, also ist $P = (2,4,\frac{1}{2})$ eine Lösung.
Mit (a) ist $\operatorname{grad} f(P) = \operatorname{grad} f(2,4,\frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$. Insbesondere ist $\partial_z f(P) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist

$$\partial_t \tilde{z}(2,4) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(P)}{\frac{\partial f}{\partial z}(P)} = -\frac{\frac{3}{2}}{-2} = \frac{3}{4},$$
$$\partial_x \tilde{z}(2,4) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(P)}{\frac{\partial f}{\partial z}(P)} = -\frac{-\frac{1}{2}}{-2} = -\frac{1}{4}.$$

7. **Extrema mit Nebenbedingungen** **(8 Punkte)**

Wenden Sie die Methode des Lagrange-Multiplikators an, um die Kandidaten für lokale Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x + y^2 = 1$ zu finden.

LÖSUNG:

Die Nebenbedingung kann geschrieben werden als $g(x,y) = 0$ mit $g(x,y) = x + y^2 - 1 = 0$.

Es gilt $\operatorname{grad} g(x,y) = \binom{-1}{2y} \neq 0$.

Für einen Extremwert (x,y) von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\operatorname{grad} f(x,y) = \binom{2x}{2y}$, ist dass gleichbedeutend mit

$$2x = \lambda, \qquad 2y = 2\lambda y, \qquad x + y^2 - 1 = 0$$

1.Fall: $y = 0$, damit ist $x = 1$, $\lambda = 2$.

2.Fall: $y \neq 0$, dann ist $\lambda = 1$ und $2x = 1$, bzw., $x = \frac{1}{2}$. Eingesetzt in die Nebenbedingung ergibt sich $y^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, bzw. $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Insgesamt erhält man als Kandidaten für lokale Maxima und Minima die drei Punkte $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

8. **Leibnizregel, Kettenregel** **(8 Punkte)**

(a) Sei $F(x) := \int\limits_1^x f(x,y)dy$ mit $f(x,y) = \frac{e^{-xy}}{y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie $F'(x)$ für $x > 0$.

$$F'(x) = \frac{2e^{-x^2}}{x} - \frac{e^{-x}}{x}$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(X) = \exp(\text{Spur}(X))$. Geben Sie Definitions- und Wertebereich und die Abbildungsvorschrift von $Df(A)$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ explizit an.
Hinweis: $\text{Spur} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist linear.

$$Df(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad Df(A)(X) = \exp(\text{Spur}(A))\text{Spur}(X)$$

Lösung:

(a) f ist auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Mit der Leibnizregel gilt also

$$F'(x) = f(x,x) + \int\limits_1^x \partial_1 f(x,y)dy = \frac{e^{-x^2}}{x} + \int\limits_1^x (-e^{-xy})dy = \frac{e^{-x^2}}{x} + \left[\frac{e^{-xy}}{x}\right]_1^x$$
$$= \frac{2e^{-x^2}}{x} - \frac{e^{-x}}{x}$$

(b) Die Ableitung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ an der Stelle A ist eine (lineare) Funktion vom gleichen Typus, $Df(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Nun ist $f(X) = exp \circ \text{Spur}(X)$. Da Spur linear ist, ist $D\,\text{Spur}(A)(X) = \text{Spur}(X)$. Mit der Kettenregel also

$$Df(A)(X) = D\exp(\text{Spur}(A)) \circ D\,\text{Spur}(A)(X) = \exp(\text{Spur}(A))\text{Spur}(X).$$

9. **Gewöhnliche Differentialgleichungen** **(6 Punkte)**

Gegeben sei die AWA $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$. Wie lautet die Lösung dieser AWA mit maximalem Lösungsintervall.

LÖSUNG:

Separation der Variablen ergibt

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = t + C,$$

bzw.

$$\arctan y = t + C$$

Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, muss $\arctan y(0) = 0 + C$, bzw. $C = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ gelten. Nun ist der Bildbereich von arctan gleich $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Somit ist die Umkehrung für $t + C \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ definiert, bzw. für $t \in]-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi[$. Somit ist $y :]-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi[\to \mathbb{R}$, $y(t) = \arctan(t + \frac{\pi}{4})$ die Lösung des AWA mit maximalem Definitionsbereich. Es kann keine auf einem größeren Lösungsintervall definierte Lösung geben, da $y(t) \to \infty$ für $t \to \frac{1}{4}\pi$ und $y(t) \to -\infty$ für $t \to -\frac{3}{4}\pi$.