PROF. DR. D. CASTRIGIANO
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 12
(07.07.2010)

Zentralübung

77. Leibnizregel für parameterabhängige Grenzen.

Seien $f, \partial_1 f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, $g, h : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar. Man beweise für $x \in [a,b]$:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \partial_1 f(x,y)dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x)g'(x).$$

LÖSUNG:

Man definiert $F : [a,b] \times [c,d] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $F[x,u,v] = \int\limits_u^v f(x,y)dy$. Dann existieren die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_1 F(x,u,v) &= \int\limits_u^v f(x,y)dy, \\
\partial_2 F(x,u,v) &= -f(x,u), \\
\partial_3 F(x,u,v) &= f(x,v)
\end{aligned}$$

und sind stetig, F ist also C^1. Die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy &= \frac{d}{dx}F(x,g(x),h(x)) \\
&= \partial_1 F(x,g(x),h(x)) + \partial_2 F(x,g(x),h(x))g'(x) + \partial_3 F(x,g(x),h(x))h'(x) \\
&= \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \partial_1 f(x,y)dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x)g'(x).
\end{aligned}$$

78. Die Gammafunktion

Die Gammafuntion ist für $x > 0$ definiert als $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Man zeige:

(a) $\Gamma(x)$ ist für $x > 0$ wohldefiniert, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\ln \Gamma(x)$ ist konvex. HINWEIS: Benutzen Sie $\int g(x)dx \int g(x)f(x)^2 dx \geq (\int g(x)f(x)dx)^2$.

LÖSUNG:

(a) Das uneigentliche Integral existiert für $x > 0$, da der Integrand auf $]0,1]$ durch die integrierbare Funktion $t \mapsto t^{x-1}$ und auf $[C,\infty[$ durch $e^{-t/2}$ majorisiert wird. Ein solches $C > 0$ gibt es, da $\frac{e^{-t+(x-1)\ln t}}{e^{-t/2}} = e^{-\frac{t}{2}+(x-1)\ln t} \to 0$ für $t \to \infty$. Somit ist

$$\Gamma(x) = \lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt \in \mathbb{R}$$

und

$$\Gamma(x+1) = \lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-t} t^x dt = \lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \left(\Big[-e^{-t} t^x \Big]_a^b + \int_a^b e^{-t} x t^{x-1} dt \right) = x\Gamma(x).$$

Wegen $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!$, gilt $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Wir berechnen

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x) = \frac{d}{dx} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}.$$

Um die Ableitungen von Γ zu berechnen, betrachten wir den Integranden,

$$\begin{aligned} \partial_x e^{-t} t^{x-1} &= \partial_x e^{-t+(x-1)\ln t} = e^{-t} t^{x-1} \ln t, \\ \partial_x^2 e^{-t} t^{x-1} &= \partial_x (e^{-t} t^{x-1} \ln t) = e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^2. \end{aligned}$$

Um bei festem $x_0 > 0$ ableiten zu können, brauchen wir eine in t integrierbare Majorante auf einem abgeschlossenen Intervall um x_0, z.B. $[\frac{x_0}{2}, 2x_0]$. Für $t \in]0,1]$ ist $x \mapsto t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$ monoton fallend, also ist $g_k(t) := e^{-t} t^{\frac{x_0}{2}-1} (\ln t)^k$, $k = 0,1,2$ jeweils eine Majorante für $t \in]0,1]$ unabhängig von $x \in [\frac{x_0}{2}, 2x_0]$.
Für $t \in [1,\infty]$ dagegen ist $x \mapsto t^{x-1}$ monoton steigend, also ist $g_k(t) := e^{-t} t^{2x_0-1} (\ln t)^k$, $k = 0,1,2$ jeweils eine Majorante für $t \in [1,\infty[$ unabhängig von $x \in [\frac{x_0}{2}, 2x_0]$.
Zu zeigen bleibt, das $g_k(t)$ integrierbar ist auf $]0,\infty[$. Für g_0 wurde das schon in (a) gezeigt, da mit x_0 auch $\frac{x_0}{2}$ und $2x_0$ größer 0 sind.
Es gilt sogar für alle $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} g_k(t) &= o(t^{\frac{x_0}{2}-1-\epsilon}) \quad \text{für } t \to 0, \\ g_k(t) &= o(e^{-t/2}) \quad \text{für } t \to \infty, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} t^{\frac{x_0}{2}-1} (\ln t)^k}{t^{\frac{x_0}{2}-1-\epsilon}} &= \lim_{t\to 0} t^\epsilon (\ln t)^k = 0, \\ \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} t^{2x_0-1} (\ln t)^k}{e^{-t/2}} &= 0. \end{aligned}$$

Die Wahl von $\epsilon = \frac{x_0}{4}$ zeigt, dass $g_k(t)$ integrierbar ist. Somit ist $\Gamma^{(k)} = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^k dt$.
Mit dem Hinweis folgt $\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2 = \int g(t)dt \int g(t)f(t)^2 dt - (\int g(t)f(t)dt)^2 \geq 0$, wobei $g(x) = e^{-t} t^{x-1}$ und $f(t) = \ln t$, d.h. $\ln \Gamma(t)$ ist konvex.

79. Integrabilitätsbedingung

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : D \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Man zeige:

(a) Für $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ erfüllt das Vektorfeld $v(x) = g(\|x\|)x$ mit $g \in C^1(]0,\infty[$ die Integrabilitätsbedingung. Gibt es ein zugehöriges Potential?

(b) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$ ist nicht einfach wegzusammenhängend. Hinweis: Man gebe ein rotationsfreies Vektorfeld auf D an, das nicht konservativ ist.

Lösung:

(a) Wir berechnen die Einträge der Jacobi-Matrix von v:

$$\partial_i v_j(x) = \partial_i(g(\|x\|)x_j) = (\operatorname{grad} g(\|x\|))_i x_j + g(\|x\|)\delta_{ij} = g'(\|x\|)\frac{x_i}{\|x\|}x_j + g(\|x\|)\delta_{ij} = \partial_j v_i(x)$$

wie man durch Vertauschen von i und j sieht. Somit ist $\operatorname{rot} v(x) = 0$, die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt.

Da das Vektorfeld radial nach außen (oder innen) zeigt, nimmt man als Ansatz für das Potential eine zentralsymmetrische Funktion, $F(x) = G(\|x\|)$, woraus sich $\operatorname{grad} F(x) = \operatorname{grad} G(\|x\|) = G'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$ ergibt, also $G'(r) = rg(r)$, mit $r = \|x\|$. Man wählt also $G(r) = \int rg(r)dr$.

(b) Die Idee ist, ein Potential auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{x^2+y^2 \le 1, z = 0\}$ anzugeben, dessen Gradientenfeld auf der Kreisscheibe stetig fortgesetzt werden kann. Als Potential kann man zum Beispiel $F(x,y,z) = \arg(r-1+iz) - \arg(r+1,z)$ wählen, mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Mit $\operatorname{grad}((r,z) \mapsto \arg(r+iz)) = (\frac{-z}{r^2+z^2}, \frac{r}{r^2+z^2})$ berechnen wir zunächst den Gradienten von $(r,z) \mapsto F(r,0,z)$

$$\begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_z \end{pmatrix} F(r,0,z) = \begin{pmatrix} \frac{-z}{(r-1)^2+z^2} \\ \frac{r-1}{(r-1)^2+z^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-z}{(r+1)^2+z^2} \\ \frac{r+1}{(r+1)^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Das Vektorfeld muss radialsymmetrisch um die z-Achse sein, daher ist

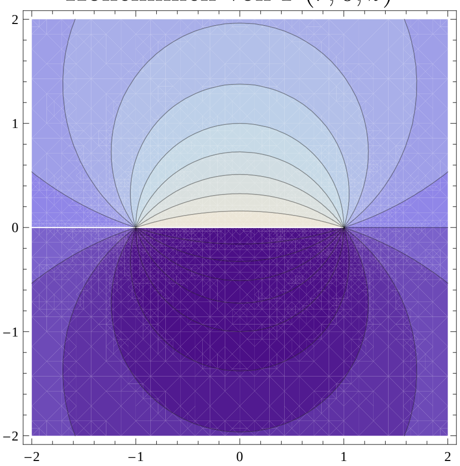
$$\operatorname{grad} F(x,y,z) = v(x,y,z) = \begin{pmatrix} \left(\frac{-z}{(r+1)^2+z^2} - \frac{-z}{(r+1)^2+z^2}\right)\frac{x}{r} \\ \left(\frac{-z}{(r+1)^2+z^2} - \frac{-z}{(r+1)^2+z^2}\right)\frac{y}{r} \\ \frac{r-1}{(r-1)^2+z^2} - \frac{r+1}{(r+1)^2+z^2} \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

was man auch mit der Kettenregel erhält. Man rechnet nach, dass v wohldefiniert und stetig auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{x^2+y^2 = 1, z = 0\}$ ist. Es ist aber nicht konservativ, da für den geschlossenen Weg $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{x^2+y^2 = 1, z = 0\}$, $\gamma(t) = (\cos t - 1, 0, \sin t)$, gilt:

$$\int_\gamma v(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = F(0+,0,0) - F(0-,0,0) = \pi - (-\pi) = 2\pi \neq 0.$$

Somit ist D nicht einfach wezusammenhängend.

Höhenlinien von $F(r,0,z)$



Hausaufgaben

80. Besselfunktionen

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt$$

die n-te Besselfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass J_n eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe für J_0 und ihren Konvergenzradius.

Bemerkung: J_0 ist gleich seiner Taylorreihe.

Lösung:

(a) Der Integrand ist stetig partiell differenzierbar nach x,

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos(x \sin t - nt) = -\sin(x \sin t - nt) \sin t$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt das auch für die Einschränkung auf das Rechteck $(x,t) \in [-N, N] \times [0, \pi]$. Somit ist J_n stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} \cos(x \sin t - nt) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t - nt) \sin t \, dt = \underbrace{-\frac{1}{\pi} \Big[\sin(x \sin t - nt)(-\cos t) \Big]_0^\pi}_{=0} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt)(x \cos t - n)(-\cos t) dt. \end{aligned}$$

$$J_n''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} (-\sin(x \sin t - nt) \sin t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) \sin^2 t \, dt.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} & x^2 J_n''(x) + x J_n'(X) + (x^2 - n^2) J_n(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) \Big(-x^2 \sin^2 t - x(x \cos t - n) \cos t + x^2 - n^2 \Big) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) n (x \cos t - n) dt = \frac{1}{\pi} \Big[-\sin(x \sin t - nt) \Big]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

(b) Wiederholtes Ableiten des Integranden ergibt

$$\begin{aligned} J_0^{(2k)}(x) &= \frac{(-1)^k}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) \sin^{2k} t \, dt, \\ J_0^{(2k+1)}(x) &= -\frac{(-1)^k}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t) \sin^{2k+1} t \, dt. \end{aligned}$$

Ausgewertet bei $x = 0$ ergibt $J_0^{(2k+1)}(x) = 0,\ J_0(0) = 1$ und für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} J_0^{(2k)}(0) &= \frac{(-1)^k}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (\sin^{2k-1} t) \sin t \, dt = \frac{(-1)^k}{\pi} \underbrace{\Big[(\sin^{2k-1} t)(-\cos t) \Big]_0^{\pi}}_{=0} \\ & \quad + \frac{(-1)^k}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (2k-1)(\sin^{2k-2} t) \cos^2 t \, dt \\ &= (2k-1)\big(-J_0^{(2k-2)}(0) - J_0^{(2k)}(0) \big). \end{aligned}$$

Somit ist $J_0^{(2k)}(0) = -\frac{2k-1}{2k} J_0^{(2k-2)}(0)$, also $J_0''(0) = -\frac{1}{2} J(0) = \frac{1}{2}$, $J^{(4)}(0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}, \ldots,$ per Induktion:

$$J^{(2k)}(0) = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} = (-1)^k \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2k)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2k)^2} = (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k k!^2}$$

Die Taylorreihe von J_0 lautet also $T_{J_0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!^2} x^{2k}$. Ihr Konvergenzradius ist ∞, da $\sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k} k!^2}} = \frac{1}{2} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} \to 0$, wie bei der Exponetialreihe.

81. Schwingungsdauer des mathematischen Pendels

Die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels $\ddot{\varphi} = \sin\varphi$ ist gegeben durch

$$T(\varphi_0) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}},$$

wobei $\varphi_0 \in]0,\pi[$ die maximale Auslenkung des Pendels in Bogenmaß ist.

(a) Entwickeln Sie bis zur 2. (oder bis zur 4.) Ordnung in φ_0. HINWEIS: Binomialreihe.

(b) Wieviele Sekunden pro Jahr Abweichung zeigt eine Pendeluhr bei maximaler Auslenkung von einem Grad, einer Bogenminute, bzw. einer Bogensekunde?

LÖSUNG:

(a) Wir betrachten für $x \in [0,1[$

$$F(x) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-x\sin^2\psi}}.$$

Sei $\epsilon \in]0,\pi[$. Die Funktion $(x,\psi) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x\sin^2\psi}}$ ist auf $[0,\pi-\epsilon]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ unendlich oft differenzierbar, die partiellen Ableitungen sind alle stetig. Somit ist Ableitung und Integral vertauschbar,

$$F^{(k)}(x) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{1}{\sqrt{1-x\sin^2\psi}}d\psi.$$

Die Ableitungen des Integranden nach x an der Stelle $x=0$ ergeben sich aus der Binomialreihe

$$(1-x\sin^2\psi)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x\sin^2\psi)^n = 1+\tfrac{1}{2}x\sin^2\psi + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2\sin^4\psi+\cdots$$

Somit ist

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2}F''(0)+\mathcal{O}(x^3) \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\tfrac{1}{2}x\sin^2\psi+\tfrac{3}{8}x^2\sin^4\psi+\mathcal{O}(x^3)\right)d\psi \\ &= 2\pi+\tfrac{\pi}{2}x+\tfrac{9\pi}{32}x^2+\mathcal{O}(x^3) = 2\pi(1+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{9}{64}x^2+\cdots) \end{aligned}$$

wegen $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\,d\psi = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\psi\,d\psi = \frac{3\pi}{8}$.

Mit $\sin^2\frac{\varphi_0}{2} = (\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\varphi_0^3}{2^3\cdot 3!}+\cdots)^2 = \frac{\varphi_0^2}{4}-\frac{\varphi_0^4}{48}+\cdots$ erhält man

$$T(\varphi_0) = 2\pi(1+\tfrac{1}{4}(\tfrac{\varphi_0^2}{4}-\tfrac{\varphi_0^4}{48})+\tfrac{9}{64}\tfrac{\varphi_0^4}{16}+\cdots) = 2\pi(1+\tfrac{1}{16}\varphi_0^2+\tfrac{11}{3072}\varphi_0^4)+\mathcal{O}(\varphi_0^6).$$

(b) $\varphi_0 = 1° = \frac{\pi}{180} \approx 0.0175$. Der relative Gangunterschied zum linearisierten Pendel ist $\frac{T(\varphi_0)-T(0)}{T(0)} \approx \frac{1}{16}\varphi_0^2 \approx 2\times10^{-5} = 2\times10^{-5}\times 31\ 536\ 000\frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{a}} \approx 630\frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{a}} \approx 10.5\frac{\mathrm{min}}{\mathrm{a}}$. Bei einer Bogenminute ($1' = \frac{1}{60}°$) ergibt sich ein Gangunterschied von 630/3600 also etwa 0.2 sec/a. Bei einer Bogensekunde ($1'' = \frac{1}{60}\cdot 1'$) ist die Abweichung nur etwa 50μsec/a.

82. Gewicht und Schwerpunkt eines inhomogenen Kreisrings

Ein Kreisring, parametrisiert durch die Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ hat eine Linienmassendichte gegeben durch $\rho(x,y) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}$. Berechnen Sie die Gesamtmasse M und die Schwerpunktkoordinaten $s = (s_x, s_y)$ des Rings.

$M = 4$	$s_x = -\dfrac{1}{3}l$	$s_y = 0$

LÖSUNG:

Die Masse ist $M = \int_\gamma \rho d\ell = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos t)} \|\dot\gamma(t)\| dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = [-2\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 4.$

Die y-Koordinate des Schwerpunktes $s = (s_x, s_y)$ ist aus Symmetriegründen gleich 0. Für die x Koordinate erhält man

$$\begin{aligned}
s_x &= \frac{1}{M}\int_\gamma x f(x,y) d\ell = \frac{1}{M}\int\limits_0^{2\pi} \gamma_1(t) \sin\tfrac{t}{2} \|\dot\gamma(t)\| dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \cos t \sin \tfrac{t}{2} dt \\
&= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\tfrac{1}{2i}(e^{it/2} - e^{-it/2}) dt = \frac{1}{16i}\Big[\tfrac{2}{3i}e^{3it/2} - \tfrac{2}{i}e^{it/2} - \tfrac{2}{i}e^{-it/2} + \tfrac{2}{3i}e^{-3it/2}\Big]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{16}\big(-\tfrac{4}{3} + 4 + 4 - \tfrac{4}{3}\big) = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

83. Magnetischer Wirbel

Gegeben ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha(-y,x)$.

(a) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt?

(b) Zeigen Sie explizit, dass $D := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ sternförmig ist.

(c) Geben Sie für $\alpha = -1$ ein Potential $V : D \to \mathbb{R}$ von $v|_D$ an und zeigen Sie, dass V nicht stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fortgesetzt werden kann.

LÖSUNG:

(a) $\partial_1 v_2(x,y) = \partial_x\big(x(x^2+y^2)^\alpha\big) = (x^2+y^2)^\alpha + 2\alpha x^2(x^2+y^2)^{\alpha-1}$,
$\partial_2 v_1(x,y) = \partial_y\big(-yx(x^2+y^2)^\alpha\big) = -(x^2+y^2)^\alpha - 2\alpha y^2(x^2+y^2)^{\alpha-1}$,
$0 \overset{!}{=} \partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y) = 2(x^2+y^2)^\alpha + 2\alpha(x^2+y^2)^\alpha = 2(x^2+y^2)^\alpha(1+\alpha)$. Die Integrabilitätsbedingung ist also erfüllt, genau dann wenn $\alpha = -1$.

(b) D ist sternförmig, z.B. bezüglich $(1,0)$. Sei (x,y) in D, $\lambda \in [0,1]$. Zu zeigen ist, dass $\lambda(x,y) + (1-\lambda)(1,0) \in D$ ist.
1. Fall: $x > 0$. Dann ist auch $\lambda x + 1 - \lambda > 0$, und somit $\lambda(x,y) + (1-\lambda)(1,0) \in D$.
2. Fall: $x \leq 0$. Dann ist $y \neq 0$, und somit $\lambda y \neq 0$ solange $\lambda \in]0,1]$, also auch $\lambda(x,y) + (1-\lambda)(1,0) \in D$. Für $\lambda = 0$ ist auch $(1,0) \in D$.

(c) $V(x,y) = \arg(x+iy)$ ist Potential von $v|_D(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$.
Man kann dies explizit Nachrechnen auf ganz D durch Gradientenbildung von

$$\begin{aligned}
\arg(x+iy) &= \arctan \tfrac{y}{x} \text{ für } x > 0,\\
\arg(x+iy) &= \arccos \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ für } y > 0 \text{ und}\\
\arg(x+iy) &= -\arccos \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ für } y < 0.
\end{aligned}$$

Oder man betrachtet die Transformation auf Polarkoordinaten

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

$\Phi|_{\mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[}$ ist bijektiv mit dem Inversen $\Psi : D \to \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[$, wobei $\Psi_1(x,y) = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ und $\Psi_2(x,y) = \varphi(x,y) = \arg(x+iy)$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \operatorname{grad} r(x,y) \\ \operatorname{grad} \varphi(x,y) \end{pmatrix} &= J_\Psi(x,y) = (J_\Phi(\Psi(x,y)))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1}\Bigg|_{(r,\varphi)=\Psi(x,y)}\\
&= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\Bigg|_{(r,\varphi)=\Psi(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also $\operatorname{grad} \phi(x,y) = v(x,y)$ für $(x,y) \in D$.

$V(x,y)$ ist nicht stetig fortsetzbar, z.B. bei $(-1,0)$, da

$$\lim_{\epsilon \to 0} V(-1,\epsilon) = \pi \neq -\pi = \lim_{\epsilon \to 0} V(-1,-\epsilon).$$