Zentralübung

70. Der Satz über implizite Funktionen, linearer Fall

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, $b \in \mathbb{R}^m$. Unter welcher Bedingung ist das Gleichungssystem $f(x, y) = b$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ nach y auflösbar? Man gebe explizit die implizit definierte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an, für die $f(x, g(x)) = b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

LÖSUNG:

Zur Illustration: $m = 1$. Dann ist f von der Form $f(x, y) = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} y$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Genau dann, wenn $\alpha_{n+1} \neq 0$ ist, ist $g(x) = \frac{b}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{n+1}}(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n)$ die durch $f(x, y) = b$ implizit definierte Funktion, die man durch Auflösen nach y erhält, denn

$$f(x, g(x)) = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} \left(\frac{b}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{n+1}} (\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n) \right) = b.$$

Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ gilt: f ist linear, also von der Form

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx + Cy \end{pmatrix},$$

mit der $m \times (n+m)$ Matrix $A = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$, wobei entsprechend $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Um die Gleichung $Bx + Cy = b$ nach $y \in \mathbb{R}^m$ auflösen zu können, muss C invertierbar sein. In diesem Fall ist sie äquivalent zur Gleichung

$$y = C^{-1}(b - Bx) = C^{-1} b - C^{-1} B x$$

Für die Funktion $g(x) = C^{-1} b - C^{-1} B x$ gilt also für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x, g(x)) = Bx + C(C^{-1} b - C^{-1} B x) = b$$

71. Thermodynamische Beziehungen

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\bar{x}) = 0$ und $\partial_j f(\bar{x}) \neq 0$ für alle $j = 1, ..., n$. Interpretieren und beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = (-1)^n.$$

LÖSUNG:

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass die Gleichung $f(x_1, ..., x_n) = 0$ lokal im Punkt $\bar{x}$ nach jeder der n Variablen aufgelöst werden kann, d.h. es existieren Funktionen $\tilde{x}_j : U_j \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x_1, ..., x_{j-1}, \tilde{x}_j(\hat{x}), x_{j+1}, ..., x_n) = 0$$

wobei $\hat{x} = (x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)$ und $\tilde{x}_j(\hat{\bar{x}}) = \bar{x}_j$. Ferner folgt aus diesem Satz, dass die Funktionen $\hat{x}_j$ stetig differenzierbar sind und dass sich deren Ableitungen ausdrücken lassen durch

$$\partial_k \hat{x}_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) = -[\partial_j f(x)]^{-1} \partial_k f(x)$$

für alle $k = 1, ..., j-1, j+1, ..., n$. Multiplizieren wir alle diese Ableitungen, dann erhalten wir

$$\prod_{j=1}^{n} \partial_{j+1} \tilde{x}_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} [\partial_j f(x)]^{-1} \partial_{j+1} f(x), = (-1)^n,$$

wobei wir die Notation $x_{n+1} \equiv x_1$ benutzt haben. Schreiben wir nun für die Funktion $\tilde{x}_j$ wieder die Koordinate x_j, erhalten wir die Behauptung.

Bemerkung:

a) Relationen dieser Art finden Anwendung in der Thermodynamik, wo die Zustandsgleichungen von der Form $f(x_1, ..., x_n) = 0$ sind. Z.B. lautet die Zustandsgleichung für ein Mol ideales Gas $f(P, V, T) = PV - RT = 0$, wobei P der Druck, V das Volumen und T die Temperatur des Gases beschreiben (R ist die Gas-Konstante). In obigem Sinne gilt

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

b) Mnemotechnisch kann man für eine Funktion $f(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^2$ die Schreibweise

$$\partial_{(a,c,d)} f = \frac{\partial f}{\partial(a, c, d)} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, c, d)} = \frac{\partial\binom{f_1}{f_2}}{\partial(a, c, d)} = \begin{pmatrix} \partial_a f_1 & \partial_c f_1 & \partial_d f_1 \\ \partial_a f_2 & \partial_c f_2 & \partial_d f_2 \end{pmatrix}$$

einführen. Für das Auflösen nach zwei Variablen, z.B. b und e gilt dann für die Funktionen $\tilde{b}(a, c, d)$ und $\tilde{e}(a, c, d)$

$$\underbrace{\frac{\partial(\tilde{b}, \tilde{e})}{\partial(a, c, d)}}_{2\times 3} = -\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial(b, e)}\right)^{-1}}_{2\times 2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial(a, c, d)}}_{2\times 3}\Bigg|_{b=\tilde{b}(a,c,d), e=\tilde{e}(a,c,d)},$$

falls die auftretende 2×2-Matrix invertierbar ist.

72. Extrema mit Nebenbedingungen I

(a) Man beschreibe die durch die Gleichung $e^{xy} = x + y$ gegebene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ unter der Nebenbedingung $e^{xy} = x + y$.

LÖSUNG:

(a) Sei $N = g^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) : e^{xy} = x + y\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) = e^{xy} - x - y$.

- N ist offenbar symmetrisch um die Diagonale $\{x = y\}$, d.i. $(x, y) \in N \Leftrightarrow (y, x) \in N$.
- Schnittpunkte mit den x, y-Achsen sind $P_1 = (1, 0)$, da aus $y = 0$ sofort $1 = e^0 = x$ folgt und $P_2 = (0, 1)$. Die Tangenten an diesen Punkten stehen senkrecht zum Gradienten von g,

$$\operatorname{grad} g(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} - 1 \\ xe^{xy} - 1 \end{pmatrix},$$

  also $\operatorname{grad} g(P_1) = \binom{-1}{0}$, $\operatorname{grad} g(P_2) = \binom{\partial_x g(P_2)}{\partial_y g(P_2)} = \binom{0}{-1}$.

  Implizite Funktion bei P_2: $\tilde{y}(0) = 1$, $\tilde{y}'(0) = -\frac{\partial_x g(P_2)}{\partial_y g(P_2)} = 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{y}''(x) &= \frac{d}{dx}\tilde{y}'(x) = -\frac{d}{dx}\frac{\partial_x g(x, \tilde{y}(x))}{\partial_y g(x, \tilde{y}(x))} \\ &= -\frac{\partial_x^2 g(x, \tilde{y}(x)) + \partial_y \partial_x g(x, \tilde{y}(x))}{\partial_y g(x, \tilde{y}(x))} + \partial_x g(x, \tilde{y}(x)) \cdot \;\cdots \end{aligned}$$

  Also ist $\tilde{y}''(0) = -\frac{\partial_x^2 g(0,1)}{\partial_y g(0,1)} = 1$, da $\partial_x^2 g(x, y) = y^2 e^{xy}$, also $\partial_x^2 g(0, 1) = 1$. Bis zur zweiten Ordnung ist also

$$\tilde{y}(x) = 1 + 0 \cdot x + \tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

- Parametrisierung (durch Probieren): $t = x + y$, $y = t - c$:

$$\begin{aligned} g(x, y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{x(t-x)} = t \;\Leftrightarrow\; x(t - x) = \ln t \;\Leftrightarrow\; x^2 - tx - \ln t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_{12} = \tfrac{t \pm \sqrt{Pt^2 - \ln t}}{2} \wedge y = t - x, \end{aligned}$$

  wobei nur $t > 0$ wahre Aussagen ermöglicht. Für die beiden Kurven $\gamma_{12} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_{12}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t \pm \sqrt{Pt^2 - \ln t}}{2}, \\ \frac{t \mp \sqrt{Pt^2 - \ln t}}{2}, \end{pmatrix}$$

  gilt also $N = \operatorname{spur}(\gamma_1) \cup \operatorname{spur}(\gamma_2)$.

Offenbar ist $\gamma(1) = P_1$ und $\gamma_2(1) = P_2$. Wegen $\frac{t}{2}(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \ln t}{t^2}}) \sim \frac{\ln t}{t^2}$ gilt die Asymptotik

$$\gamma_1(t) \sim \begin{pmatrix} t \\ \frac{\ln t}{t^2} \end{pmatrix}, \quad t \gg 1, \qquad \gamma_1(t) \sim \begin{pmatrix} \sqrt{-\ln t} \\ -\sqrt{-\ln t} \end{pmatrix}, \quad t \ll 1,$$

(b) $\operatorname{grad} F(x, y) = \binom{x}{y}$. Die Methode des Lagrange-Multiplikators führt auf die Gleichungen $g(x, y) = 0$, $\operatorname{grad} F(x, y) = \lambda g(x, y)$, also insgesamt die drei Gleichungen

$$x = \lambda(ye^{xy} - 1), \qquad y = \lambda(xe^{xy} - 1), \qquad e^{xy} = x + y$$

für die drei Unbekannten x, y, λ. Als Lösung findet man $(x, y, \lambda) = (1, 0, -1)$ und $(x, y, \lambda) = (0, 1, -1)$. Das dies die einzigen Lösungen sind, kann man z.B. aus (a) und Konvexitätseigenschaften von γ_1 und γ_2 herleiten. Insgesamt erhält man die absuluten Minima P_1 und P_2, jeweils mit dem Funktionswert $\frac{1}{2}$.

Hausaufgaben

73. Newton-Iteration, eindimensional

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und x^* eine Nullstelle von f mit $f'(x^*) \neq 0$. Man zeige, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die Funktion $F : U_\epsilon(x^*) \to U_\epsilon(x^*)$,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

eine Kontraktion ist. Welches sind die Fixpunkte von F?

(b) Berechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder der Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$ für $f(x) = x^2 - 2$ mit geeignetem Startwert x_0 und interpretieren Sie sie geometrisch an Hand des Graphen von f und dessen Tangenten an die Punkte $(x_n, f(x_n))$.

Lösung:

(a) Es gibt ein $\epsilon_1 > 0$, für dass $f'(x) \neq 0$, wenn $|x - x^*| < \epsilon_1$, da $f'^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}$ offen ist und x^* enthält. Somit ist $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ für $x \in U_{\epsilon_1}(x^*)$ wohldefiniert.
Weiter ist $F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Wegen $F'(x^*) = 0$ gibt es nun ein $\epsilon \in \,]0, \epsilon_1[$, für dass $|F'(x)| < \frac{1}{2}$, wenn $|x - x^*| < \epsilon$. $F|_{U_\epsilon(x^*)}$ ist also Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\frac{1}{2} < 1$, mithin eine Kontraktion.
Begründung 1: Denn nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu $x, x' \in U_\epsilon(x^*)$ einen Mittelwert ξ zwischen x und x', so dass

$$|F(x) - F(x')| = |(x - x')F'(\xi)| \leq \tfrac{1}{2}|x - x'|.$$

Begründung 2: Nach dem Mittelwersatz der Integralrechnung ist (oE für $x > x'$)

$$|F(x) - F(x')| = \left| \int_{x'}^{x} F'(\xi) d\xi \right| \leq \int_{x'}^{x} \left| F'(\xi) \right| d\xi \leq \tfrac{1}{2}|x - x'|.$$

Für Begründung 1 braucht man nur die Differenzierbarkeit von F. Für Begründung 2 muss F' zusätzlich noch integrierbar sein, was hier gegeben ist, da F' sogar stetig ist.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt das so eingeschränkte F also genau einen Fixpunkt, der natürlich x_0 ist.

(b) Aus $f(x) = x^2 - 2$ ergibt sich auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $F(x) = x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Die Fixpunktiteration lautet also $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. Für die Tangenten an x_n gilt die Formel $T_{x_n}(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. Somit ergibt sich x_{n+1} geometrisch als der Schnittpunkt der Tangente an f bei x_n mit der x-Achse. Im konkreten Fall ergibt zum Beispiel der Startwert $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
x_1 = \frac{3}{2} &= 1.5 \\
x_2 = \frac{17}{12} &= 1.41666\cdots \\
x_3 = \frac{577}{408} &\approx 1.41421568 \\
x_4 = \frac{665857}{470832} &\approx 1.4142135623746899 \\
x_5 = \frac{886731088897}{627013566048} &\approx 1.4142135623730950488016896235 0 \\
\sqrt{2} &= 1.4142135623730950488016887242 1
\end{aligned}$$

74. Taylorentwicklung einer implizit definierten Funktion

(a) Man begründe: Ist $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Funktion, $k \in \mathbb{N}$, so dass $f(x, y) = 0$ in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ lokal nach y auflösbar ist, dann ist auch die dort lokal definierte Funktion $g : W \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x, g(x)) = 0$ für $x \in W$ k-mal stetig differenzierbar.

(b) Sei $p(x)$ ein reelles Polynom mit der einfachen Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass das Polynom $p(x) - \alpha$ für kleine α eine Nullstelle $\tilde{x}(\alpha)$ in der Nähe von x_0 besitzt und entwickle $\tilde{x}(\alpha)$ bis zur dritten Ordnung in α.
Hinweis: Man betrachte die Gleichung $f(\alpha, x) = 0$ für $f(\alpha, x) = p(x) - \alpha$.

Lösung:

(a) Die lokale Auflösbarkeit nach y ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass $\partial_2 f(x_0, y_0)$ invertierbar ist. Laut dem Satz über implizite Funktionen gibt es ein offene Umgebung W von x_0 und eine Funktion $g : W \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x, g(x)) = 0$ für $x \in W$. g ist stetig differenzierbar mit $J_g(x) = -(\partial_2 f(x, g(x)))^{-1} \partial_1 f(x, g(x))$. $k = 1$ ist also durch den Satz über implizite Funktionen abgedeckt.
Für $k = 2$ ist J_f und g stetig differenzierbar, also auch J_g, somit ist g zweimal stetig differenzierbar.
Für $k = 3$ ist J_f und g zweimal stetig differenzierbar, also auch J_g, somit ist g dreimal stetig differenzierbar, usw.

(b) Die Gleichung $f(\alpha, x) = 0$ mit der Funktion $f(\alpha, x) = p(x) - \alpha$ kann im Punkt $(0, x_0)$ lokal nach x aufgelöst werden, da $\partial_x f(0, x_0) = p'(x_0) \neq 0$ (einfache Nullstelle). Somit existiert die auf einer Umgebung von $\alpha = 0$ definierte stetige Funktion $\tilde{x}(\alpha)$ mit $\tilde{x}(0) = x_0$, für die $f(\alpha, \tilde{x}(\alpha)) = 0$ gilt. Da f unendlich oft differenzierbar ist, gilt für die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\tilde{x}'(\alpha) &= -\frac{\partial_\alpha f(\alpha, \tilde{x}(\alpha))}{\partial_x f(\alpha, \tilde{x}(\alpha))} = \frac{1}{p'(\tilde{x}(\alpha))}, \\
\tilde{x}''(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{p'(\tilde{x}(\alpha))} = -\frac{p''(\tilde{x}(\alpha))\tilde{x}'(\alpha)}{p'(\tilde{x}(\alpha))^2} = -\frac{p''(\tilde{x}(\alpha))}{p'(\tilde{x}(\alpha))^3}, \\
\tilde{x}'''(\alpha) &= -\frac{d}{d\alpha} \frac{p''(\tilde{x}(\alpha))}{p'(\tilde{x}(\alpha))^3} = -\frac{p'''(\tilde{x}(\alpha))\tilde{x}'(\alpha)}{p'(\tilde{x}(\alpha))^3} + 3\frac{p''(\tilde{x}(\alpha))\tilde{x}'(\alpha)}{p'(\tilde{x}(\alpha))^4} \\
&= \frac{3p''(\tilde{x}(\alpha)) - p'''(\tilde{x}(\alpha))p'(\tilde{x}(\alpha))}{p'(\tilde{x}(\alpha))^5}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\tilde{x}(\alpha) = x_0 + \frac{\alpha}{p'(x_0)} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{p''(x_0)}{p'(x_0)^3} + \frac{\alpha^3}{6} \frac{3p''(x_0) - p'''(x_0)p'(x_0)}{p'(x_0)^5} + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

Als Merkregel kann man übrigens

$$\tilde{x}'(\alpha) = \frac{dx}{d\alpha} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

schreiben.

75. Lokale Auflösbarkeit

(a) Sei $f(x,y,z)=\sqrt{2}\sin(xy)-e^z$. Man löse jeweils nach x,y,z auf und berechne den Gradienten der erhaltenen Funktionen an der Stelle $(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)$.

(b) Sei $f(x,y,z)=\sqrt{2}\cos(z)\sin(xy)-(x+\frac{y}{\pi})e^z$. Man berechne den Gradienten der durch Auflösen nach x, y, bzw. z erhaltenen Funktionen an der Stelle $(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)$.

LÖSUNG:

(a) Es gilt $f(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}-e^0=0$.
$\tilde{z}(x,y) = \ln(\sqrt{2}\sin xy)$ definiert für $\sin(xy)>0$. $\operatorname{grad}\tilde{z}(x,y) = (\frac{y\cos xy}{\sin xy},\frac{x\cos xy}{\sin xy})$, $\operatorname{grad}\tilde{z}(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})=(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})$.
$\tilde{x}(y,z) = \frac{1}{y}\arcsin(\frac{e^z}{\sqrt{2}})$ für $z\le\frac{1}{2}\ln 2$ ist eine mögliche Auflösung nach x. Ableiten macht keine Freude. Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt aber

$$\partial_{(y,z)}\tilde{x}(y,z) = -\left.\frac{\partial_{(y,z)}f(x,y,z)}{\partial_x f(x,y,z)}\right|_{x=\tilde{x}(y,z)},$$

wobei $\partial_{(y,z)}f$ für $(\partial_y f\ \partial_z f)$ steht. Nun ist $\operatorname{grad} f(x,y,z)=(\sqrt{2}y\cos xy,\sqrt{2}x\cos xy,-e^z)$, also $\operatorname{grad} f(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)=(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2},-1)$. Somit ist $\operatorname{grad}\tilde{x}(\frac{\pi}{2},0)=(-\frac{1}{\pi},\frac{2}{\pi})$. Entsprechend ist

$$\operatorname{grad}\tilde{y}(\tfrac{1}{2},0)=(\partial_x\tilde{y},\partial_z\tilde{y})(\tfrac{1}{2},0)=\left.\left(-\frac{\partial_x f}{\partial_y f},-\frac{\partial_z f}{\partial_y f}\right)\right|_{(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)}=(-\pi,2)$$

und $\tilde{y}(x,z)=\frac{1}{x}\arcsin(\frac{e^z}{\sqrt{2}})$ für $z\le\frac{1}{2}\ln 2$ ist eine mögliche Auflösung nach y.

(b) wieder ist $f(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)=\sqrt{2}\cos(0)\sin\frac{\pi}{4}-1\cdot e^0=0$.
$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos(z)y\cos(xy)-e^z\\ \sqrt{2}\cos(z)x\cos(xy)-\frac{1}{\pi}e^z\\ -\sqrt{2}\sin(z)\cos(xy)-(x+\frac{y}{\pi})e^z\end{pmatrix}.$$
Also ist $\operatorname{grad} f(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)=(\frac{\pi}{2}-1,\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi},-1)$. Mit dem Satz über implizite Funktionen erhält man also wie in (a)

$$\begin{aligned}
\partial_{(y,z)}\tilde{x}(\tfrac{\pi}{2},0) &= -\frac{\partial_{(y,z)}f(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)}{\partial_x f(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},0)}=\left(-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}}{\frac{\pi}{2}-1},\frac{1}{\frac{\pi}{2}-1}\right)\\
\partial_{(x,z)}\tilde{y}(\tfrac{1}{2},0) &= \left(-\frac{\frac{\pi}{2}-1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}},\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}}\right),\\
\partial_{(x,y)}\tilde{z}(\tfrac{1}{2},\frac{\pi}{2}) &= (\tfrac{\pi}{2}-1,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\pi}).
\end{aligned}$$

76. Extrema mit Nebenbedingungen II

(a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(1,0,0)$ von der durch die Gleichung $x+y-z=0$ gegebenen Ebene.

(b) Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$ auf der Einheitskreisscheibe $x^2+y^2\leq 1$?

LÖSUNG:

(a) Der minimal Abstand der Ebene vom Punkt $P=(1,0,0)$ ist $1/\sqrt{3}$. Alternativen

(i) Geometrisch: Der Einheitsnormalenvektor der Ebene ist $n=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. Der Abstand von $P=(1,0,0)$ zu Ebene ist $|P\cdot n|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii) Parametrisieren: Wir lösen die Nebenbedingung auf, $z=x+y$, und minimieren anstelle der Abstandsfunktion $f(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+z^2$ die Funktion

$$\tilde{f}(x,y)=f(x,y,x+y)=(x-1)^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(x+y)^2\ .$$

$$\nabla\tilde{f}(x,y)=\begin{pmatrix}4x+2y-2\\2x+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad(x,y)=(2/3,-1/3)\ .$$

$$H_{\tilde{f}}(x,y)=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad\det H_{\tilde{f}}(x,y)=12>0\ ,\quad\operatorname{spur}H_{\tilde{f}}(x,y)=8>0,$$

also ein Minimum. Der minimale Abstand wird für $z=x+y=\frac{1}{3},x=\frac{2}{3},y=-\frac{1}{3}$ angenomen und $\|P-(2/3,-1/3,1/3)\|=1/\sqrt{3}$.

(iii) Lagrangemultiplikator: Minimiere $f(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+z^2$ unter der Nebenbdingung $g(x,y,z)=x+y-z=0$. Dazu löse man die Gleichungen $\operatorname{grad}f(x,y,z)=\lambda\operatorname{grad}g(x,y,z)$, wobei $\operatorname{grad}g(x,y,z)=(1,1,-1)\neq 0$ ist, zusammen mit $g(x,y,z)=0$ für die 4 Unbekannten x,y,z,λ. Die vier Gleichungen lauten $2x-2=\lambda$, $2y=\lambda$, $2z=-\lambda$, $x+y-z=0$.
Man erhält $x=\frac{1}{2}\lambda+1$, $y=\frac{1}{2}\lambda$, $z=-\frac{1}{2}\lambda$ Eingesetzt in die Nebenbedingung ergibt sich $\frac{1}{2}\lambda+1+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\lambda=0$, bzw. $\lambda=-\frac{2}{3}$. Somit wird das Minimum im Punkt $(2/3,-1/3,1/3)$ mit dem schon berechneten Abstand von P, nämlich $1/\sqrt{3}$.

(b) Beh Die Funktion f hat zwei Maxima in den Punkten $p_{1,2}=\pm(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ mit $f(p_{1,2})=1/2$ und zwei Minima in den Punkten $p_3=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ und $p_4=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ mit $f(p_{3,4})=-1/2$.
Bew Im Innern des Kreises gibt es nur einen stationären Punkt, den Nullpunkt, der offenbar ein Sattelpunkt ist. Somit müssen alle Extremwerte auf dem Rand liegen.
Die Nebenbedingungsfunktion $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ist $g(x,y)=x^2+y^2-1$. Der Gradient von g ist

$$\operatorname{grad}g(x,y)=(2x,2y)\neq(0,0)\quad\text{für }x^2+y^2=1\ .$$

Es genügt also, die kritischen Punkte der Lagrangeschen Hilfsfunktion $F_\lambda(x,y):=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ zu bestimmen. Wir finden:

$$0=y-2\lambda x \qquad (1)$$
$$0=x-2\lambda y \qquad (2)$$
$$0=x^2+y^2-1 \qquad (3)$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem: $-x\cdot(\mathbf{??})+y\cdot(\mathbf{??})$ liefert $\lambda(x^2-y^2)=0$. Mit $\lambda\neq 0$ wird also $x^2=y^2$. Mit $(\mathbf{??})$ folgt $x=\pm 1/\sqrt{2}$ und $y=\pm 1/\sqrt{2}$. Es entstehen die 4 Punkte $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ und $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$. Da die durch die Nebenbedingung gegebene Kreislinie kompakt ist werden absolute Maxima und Minima angenommen. Die einzigen Kandidaten hierfür sind die gerade bestimmten vier Punkte. Wegen $f(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=f(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})=1/2$ (Maxima) und $f(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})=f(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})=-1/2$ (Minima) folgt die Behauptung.