Zentralübung

63. Die multinomische Formel

Man zeige für $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}^k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu|=k} \frac{k!}{\nu!} x^\nu.$$

LÖSUNG:

Die erste Gleichung ist klar, da

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_n)^k &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^k = \left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_1}\right) \cdots \left(\sum_{i_k=1}^n x_{i_k}\right) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n x_{i_1} \cdots x_{i_k} \\ &= \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}^k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung definieren wir zu einem $i = (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ den Multiindex $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ durch

$$\nu_j = |\{\kappa : i_\kappa = j\}|$$

für $j = 1, \ldots, n$, zu dem i "gehört". Somit ist $|\nu| = k$ und

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k} = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_k} = x^\nu.$$

Umgekehrt gibt es zu einem bestimmten Multiindex $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ genau $\frac{k!}{\nu_1! \cdots \nu_k!} = \frac{k!}{\nu!}$ Indextupel $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$, die zu ebendiesem Multiindex gehören.

Begründung: Sei $(i_1, \ldots, i_k)$ ein Indextupel, das zum Multiindex ν gehört. Dann gehören für jede Permutation $\pi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ das Indextupel $(i_{\pi(1)}, \ldots, i_{\pi(k)})$ zum selben Multiindex. Diese $k!$ Permutationen sind aber nicht alle verschieden. Werden nur die ν_1 Indizes permutiert, die den Wert 1 haben, so bleibt das Indextupel unverandert. Es gibt $\nu_1!$ solcher Permutationen. Man muss also $k!$ durch $\nu_1!$ dividieren. Das gleiche gilt für ν_2, usw...

Insgesamt stehen also in der Gleichung

$$\sum_{i \in \{1,\ldots,n\}^k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu|=k} \frac{k!}{\nu!} x^\nu$$

links und rechts genau die gleichen Terme.

64. Taylor-Entwicklung

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung.

(a) $f(x,y) = \frac{1+x^2-2y^2}{\sqrt{4+xy}}$ im Entwicklungspunkt $(0,0)$,

(b) $f(x,y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}$ im Entwicklungspunkt $(1,\pi)$.

LÖSUNG:

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung um den Entwicklungspunkt (x_0, y_0) allgemein

$$\begin{aligned} f(x_0+\alpha, y_0+\beta) &= f(x_0,y_0) + \alpha\partial_x f(x_0,y_0) + \beta\partial_y f(x_0,y_0) \\ &\quad + \tfrac{\alpha^2}{2}\partial_{xx} f(x_0,y_0) + \tfrac{\beta^2}{2}\partial_{yy} f(x_0,y_0) + \alpha\beta\partial_{xy} f(x_0,y_0) + o(|(\alpha,\beta)|^2). \end{aligned}$$

Man kann natürlich alle benötigten Ableitungen explizit berechnen. Dann hat man mit obiger Formel das gesuchte Taylor-Polynom bestimmt. Eine weitere Möglichkeit besteht darin die bekannten Taylor-Entwicklungen auftretender Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ einzusetzen und dann Terme höherer Ordnung wegzulassen:

(a) Es ist $\frac{1}{\sqrt{4+xy}} = \frac{1}{2}(1+\frac{xy}{4})^{-1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{xy}{4} +$ Terme höherer Ordnung. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1+x^2-2y^2)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{xy}{4} + \text{ T. h. O.}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{xy}{16} - y^2}_{=T_2(x,y)} + \text{ T. h. O.} \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben $f(x,y) = f(x_0+\alpha, y_0+\beta)$. Das ergibt

$$\begin{aligned} f(1+\alpha, \pi+\beta) &= (1+\alpha)^2 \sin(\tfrac{(1+\alpha)(\pi+\beta)}{2}) = (1+2\alpha+\alpha^2)\sin(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\alpha\beta) \\ &= (1+2\alpha+\alpha^2)\cos(\tfrac{\pi}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\alpha\beta) \\ &= (1+2\alpha+\alpha^2)(1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\alpha\beta)^2 + \text{ Terme höherer Ordnung}) \\ &= (1+2\alpha+\alpha^2)(1 - \tfrac{\pi^2}{8}\alpha^2 - \tfrac{1}{8}\beta^2 - \tfrac{\pi}{4}\alpha\beta + \text{ T. h. O.}) \\ &= \underbrace{1 + 2\alpha + (1-\tfrac{\pi^2}{8})\alpha^2 - \tfrac{1}{8}\beta^2 - \tfrac{\pi}{4}\alpha\beta}_{=T_{2,(1,\pi)}(x,y)} + \text{ T. h. O.} \end{aligned}$$

mit $\alpha = x-1$, $\beta = y-\pi$.

65. Lineare Ausgleichsrechnung

(a) Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, mit M^TM invertierbar, $y \in \mathbb{R}^n$. Finden Sie das Minimum der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(\alpha) = |y - M\alpha|^2$.

(b) Seien $(v_i, a_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 100$, Messwerte der Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Autos jeweils zu den Zeiten t_i, $t_i < t_{i+1}$. Das Auto wurde auf ebener Strecke zur Zeit $t_0 < t_1$ ausgekuppelt und rollte aus. Gesucht sind die Koeffizienten der Funktion $a(v) = \mu + \beta v^2$, aus denen sich Rollreibung und Luftwiderstandsbeiwert des Autos bestimmen lassen, so dass die quadratische Abweichung $\sum\limits_i |a_i - a(v_i)|^2$ minimal ist.

Geben Sie explizite Formeln für μ, β an.

LÖSUNG:

(a) Wir schreiben

$$F(\alpha) = (M\alpha - y)^T(M\alpha - y) = (\alpha^TM^T - y^T)(M\alpha - y) = \alpha^T(M^TM)\alpha - 2y^TM\alpha + y^Ty.$$

Der Gradient dieser quadratischen Funktion ist

$$\operatorname{grad} F(\alpha) = 2(M^TM)\alpha - 2(y^TM)^T = 2(M^TM)\alpha - 2M^Ty.$$

Der einzige Kandidat für eine Extremstelle ist also die Lösung der Gleichung

$$(M^TM)\alpha = M^Ty,$$

nämlich $\alpha^* = (M^TM)^{-1}M^Ty$. Die Hesse-Matrix von F ist $H_F(\alpha) = 2M^TM$. Für $x \in \mathbb{R}^2$ ist $\langle x, M^TMx\rangle = \langle Mx, Mx\rangle = \|Mx\|^2 \geq 0$. Die symmetrische Matrix M^TM besitzt also nur nichtnegative Eigenwerte. Wäre ein Eigenwert gleich 0, so wäre M^TM nicht invertierbar. Somit ist M^TM positiv definit. D.h. α^* ist ein Minimum. Es ist sogar das einzige absolute Minimum (siehe Hausaufgaben).

(b) Es ist $n = 100$. Wir erhalten

$$\sum_i |a_i - a(v_i)|^2 = \sum_i |a_i - \mu - \beta v_i^2|^2 = |y - M\alpha|^2$$

mit $y = (a_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$, $M = \begin{pmatrix} 1 & v_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & v_n^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, $\alpha = \begin{pmatrix} \mu \\ \beta \end{pmatrix}$. Nun ist

$$M^TM = \begin{pmatrix} n & \sum_i v_i^2 \\ \sum_i v_i^2 & \sum_i v_i^4 \end{pmatrix}, \qquad M^Ty = \begin{pmatrix} \sum_i a_i \\ \sum_i a_i v_i^2 \end{pmatrix}$$

Führt man den Mittelwert $\langle f(x,y)\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)$ ein, so ist das gesuchte Minuimum bei

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mu \\ \beta \end{pmatrix} &= (M^TM)^{-1}M^Ty = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \langle v^2\rangle \\ \langle v^2\rangle & \langle v^4\rangle \end{pmatrix}^{-1} n \begin{pmatrix} \langle a\rangle \\ \langle av^2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\langle v^4\rangle - \langle v^2\rangle^2}\begin{pmatrix} \langle v^4\rangle & -\langle v^2\rangle \\ -\langle v^2\rangle & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle a\rangle \\ \langle av^2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\langle v^4\rangle - \langle v^2\rangle^2}\begin{pmatrix} \langle v^4\rangle\langle a\rangle - \langle v^2\rangle\langle av^2\rangle \\ \langle av^2\rangle - \langle v^2\rangle\langle a\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der beste Schätzer für μ ist also $\langle a\rangle\frac{\langle v^4\rangle - \langle av^2\rangle\langle v^2\rangle}{\langle v^4\rangle - \langle v^2\rangle^2}$ und für β ist es $\frac{\langle av^2\rangle - \langle a\rangle\langle v^2\rangle}{\langle v^4\rangle - \langle v^2\rangle^2}$.

Hausaufgaben

66. Taylorformel konkret

(a) 49 nummerierte Bälle werden aus einer großen Kiste in zufälliger Reihenfolge gezogen und dabei auf zwei Kisten verteilt, so dass die ersten 43 Bälle in die erste, und der Rest in die zweite Kiste kommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Nummern der Bälle in der ersten Kiste korrekt vorhersagen?

(b) Sie wollen alle 12-ten partiellen Ableitungen von $f \in C^{12}(\mathbb{R}^2)$ berechnen. Wieviele gibt es insgesamt? Wieviele müssen Sie wegen des Satzes von Schwarz tatsächlich nur berechnen? Wieviele partielle Ableitungen sind gleich $\partial_1^3\partial_2^9 f$?

(c) Sie wollen alle fünften partiellen Ableitungen von $f \in C^{12}(\mathbb{R}^3)$ berechnen. Wieviele gibt es insgesamt? Wieviele müssen Sie wegen des Satzes von Schwarz tatsächlich nur berechnen? Wieviele partielle Ableitungen sind gleich $\partial_1^2\partial_2^3 f$?

(d) (*) Finden Sie eine Formel für die Anzahl der verschiedenen k-ten Ableitungen für eine Funktion mit n Variablen!

LÖSUNG:

(a) Die Anzahl der gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten ist $\binom{49}{43} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} \approx 14\times 10^6$. Die Wahrscheinlichkeit ist ihr Kehrwert.

(b) Bei jeder Ableitung kann man nach der ersten oder der zweiten Variable ableiten. Es gibt also insgesamt $2^{12} = 4096$ 12-te partielle Ableitungen.
Wegen der Vertauschbarkeit muss man nur 13 Ableitungen berechnen, nämlich $\partial_1^{12} f$, $\partial_1^{11}\partial_2 f$, …, $\partial_1\partial_2^{11} f$, $\partial_2^{12} f$.
Es gibt $\binom{12}{3} = 220$ Möglichkeiten durch zwölfmaliges partielles Ableiten auf genau dreimaliges Ableiten nach der ersten Variablen zu kommen.

(c) Insgesamt gibt es $3^5 = 243$ Ableitungen.
Die Anzahl der unterschiedlichen Ableitungen ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten fünf ununterscheidbare Bälle auf 3 Kisten zu verteilen. Die möglichen Multiindizes sind

$$\begin{aligned}
&(5,0,0),\\
&(4,1,0),(4,0,1),\\
&(3,2,0),(3,1,1),(3,0,2),\\
&(2,3,0),(2,2,1),(2,1,2),(2,0,3),\\
&(1,4,0),(1,3,1),(1,2,2),(1,1,3),(1,0,4),\\
&(0,5,0),(0,4,1),(0,3,2),(0,2,3),(0,1,4),(0,0,5)
\end{aligned}$$

Es sind also 21 verschiedene.
Es gibt $\frac{5!}{2!3!0!} = 10$ fünfte partielle Ableitungen, die gleich $\partial_1^2\partial_2^3 f$ sind.

(d) Wir wollen die Anzahl der Multiindizes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ bestimmen, für die $|\nu| = k$ gilt. Die Antwort ist $\binom{k+n-1}{n-1}$.
Zu $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es eine stückweise geradlinige Kurve $\gamma : [0, |\nu| + n - 1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned}
&\gamma(0) = (0,0), \gamma(\nu_1) = (0,\nu_1), \gamma(\nu_1+1) = (1,\nu_1), \gamma(\nu_1+1+\nu_2) = (1,\nu_1+\nu_2),\\
&\gamma(\nu_1+1+\nu_2+1) = (2,\nu_1+\nu_2), \dots,\\
&\gamma(\nu_1+1+\cdots\nu_{n-2}+1+\nu_{n-1}) = (n-2, \nu_1+\cdots+\nu_{n-1}),\\
&\gamma(\nu_1+1+\cdots\nu_{n-2}+1+\nu_{n-1}+1) = (n-1, \nu_1+\cdots+\nu_{n-1}),\\
&\gamma(|\nu|+n-1) = (n-1, |\nu|).
\end{aligned}$$

Für $|\nu| = k$ besteht γ aus $k+n-1$ waagrechten oder senkrechten Segmenten der Länge 1, von denen genau $n-1$ Segmente waagrecht sind. Es gibt genau $\binom{k+n-1}{n-1}$ solche Kurven, die jeweils eineindeutig einem Multiindex zugeordnet sind.

67. Taylorentwicklung entlang einer Geraden

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = th$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f \circ \gamma(t)$.

(a) Man zeige für $k \in \mathbb{N}_0$

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i \in \{1,\cdots,n\}^k} (\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f)(th) h_{i_1} \cdots h_{i_k} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = k} \frac{k!}{\nu!} \partial^\nu f(th) h^\nu.$$

Hinweis: Sie können sich auf Aufgabe 63 beziehen.

(b) die Taylorreihe von g konvergiere in einer Umgebung der 0 gegen g. Bestätigen Sie für kleine t

$$f(th) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\nu f(0)}{\nu!} (th)^\nu.$$

Lösung:

(a) $k = 0$. $g^{(0)}(t) = g(t) = f(th)$,

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = 0} \frac{0!}{\nu!} \partial^\nu f(th) h^\nu = f(th),$$

da der einzige Summand mit $\nu = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$ gebildet wird.

$k > 0$. $g'(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \operatorname{grad} f(th), h \rangle = \sum\limits_{i_1=1}^{n} (\partial_{i_1} f)(th) h_{i_1}$ Nun ist $t \mapsto (\partial_{i_1} f)(th)$ von der gleichen Art wie $t \mapsto g(t) = f(th)$. Somit ist

$$g''(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} (\partial_{i_1} f)(th) \right) h_{i_1} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} (\partial_{i_2} \partial_{i_1} f)(th) h_{i_2} h_{i_1}$$

k-mal iteriert ergibt sich (Induktion)

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} (\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f)(th) h_{i_k} \cdots h_{i_1} = \sum_{i \in \{1,\cdots,n\}^k} (\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f)(th) h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

Wie bei der multinomischen Formel in Aufgabe 63 wird jedem durch das Indextupel $i \in \{1, \cdots, n\}^k$ indizierten Summanden der Multiindex $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\nu| = k$ zugeordnet, der durch $\nu_j = |\{\kappa : i_\kappa = j\}|$, $j = 1, \ldots, n$ definiert ist. Wegen des Satzes von Schwarz ist $\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f = \partial^\nu f$ und es gilt $h_{i_1} \cdots h_{i_k} = h^\nu$. Zu jedem Multiindex ν gibt es wie in Aufgabe 63 genau $\frac{k!}{\nu!}$ identische Summanden deren Indextupel zum Multiindex ν gehört. Somit ist

$$g^{(k)}(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = k} \frac{k!}{\nu!} \partial^\nu f(th) h^\nu.$$

(b) Nach Voraussetzung gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass für $|t| < \epsilon$ die Taylorreihe von $g(t)$ mit $g(t) = f(th)$ übereinstimmt. Somit ist

$$f(th) = g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}_0^n \\ |\nu| = k}} \frac{k!}{\nu!} \partial^\nu f(th) h^\nu t^k = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\nu f(0)}{\nu!} (th)^\nu.$$

68. Quadratisches Ergänzen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Bestimmen Sie den stationären Punkt x_0 von $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^T Ax + b^T x,$$

und geben Sie Bedingungen dafür an, dass x_0 ein lokales Minimum ist.
Hinweis: Vergleichen Sie die Taylorformel bis zur zweiten Ordnung im Entwicklungspunkt x mit $F(x+h)$.

(b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ die Eigenwerte von A und $(b_1, \ldots, b_n)$ eine zugehörige Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Geben Sie explizit eine bijektive Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ihre Umkehrfunktion an, so dass für $\tilde{F} = F \circ \Phi$ einfach $\tilde{F}(y) = F(x_0) + \|y\|^2$ gilt. Begründen sie warum x_0 absolutes Minimum von F ist.

Lösung:

(a) Vergleich man mit der Taylorformel

$$F(x+h) = F(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle h, H_F(x)h\rangle + R_3(h)$$

ergibt

$$\begin{aligned} F(x+h) &= \tfrac{1}{2}\langle x+h, A(x+h)\rangle + \langle b, x+h\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + \langle x, Ah\rangle + \tfrac{1}{2}\langle h, Ax\rangle + \tfrac{1}{2}\langle b, h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle h, Ah\rangle \\ &= F(x) + \langle Ax + b, h\rangle + \langle h, \tfrac{1}{2}Ah\rangle \end{aligned}$$

woraus man sofort $\operatorname{grad} F(x) = Ax + b$, $H_F(x) = A$ und $R_3(h) = 0$ abliest. $\operatorname{grad} F(x) = 0$ ist gleichbedeutend mit $Ax = -b$, mit der eindeutigen Lösung $x_0 = -A^{-1}b$. Die Hessematrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

(b) Man wählt als Urpsrung der neuen Koordinaten x_0 und als Koordinatenvektoren die Eigenvektoren von A.
Sei $B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots b_n \end{pmatrix}$. Setze zunächst $\Phi_0(y) = x_0 + By$. Damit ist wegen $\operatorname{grad} F(x_0) = 0$ und $B^T = B^{-1}$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(y) &= F(x_0 + By) = F(x_0) + \tfrac{1}{2}\langle By, ABy\rangle = F(x_0) + \tfrac{1}{2}\langle y, B^T ABy\rangle \\ &= F(x_0) + \tfrac{1}{2}\langle y, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y\rangle. \end{aligned}$$

Setzt man im zweiten Versuch $\Phi_0(y) = x_0 + BDy$ mit der Diagonalmatrix

$$D = \sqrt{2}\operatorname{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_n^{-1/2}),$$

so erhält man

$$\tilde{F}(y) = F(x_0) + \tfrac{1}{2}\langle Dy, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Dy\rangle = F(x_0) + \|y\|^2.$$

Offenbar ist $\Phi^{-1}(x) = D^{-1}B^T(x - x_0)$, somit ist $F(x) = F(x_0) + \|D^{-1}B^T(x - x_0)\|^2$. $x = x_0$ ist also offensichtlich das absolute Minimum von F.

69. Extremwertbestimmung

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$

(a) (i) eine Funktion, deren Graph Tangentialebene an den Graph G_f bei $(0, 1)$ ist,
(ii) eine quadratische Funktion, die mit f bis zu den zweiten Ableitungen im Punkt (x_0, y_0) übereinstimmt,

(b) lokale und globale Extremstellen und Sattelpunkte,

(c) Maximum und Minimum für $(x, y) \in [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \times [-2, 2]$.

Lösung:

(a) (i) $T(x, y) = f(0, 1) + \operatorname{grad} f(0, 1) \cdot (x, y - 1)$
$(= 1 - 3x + 4(y - 1))$

(ii) $Q(x, y) = f(x_0, y_0) + \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \binom{x-x_0}{y-y_0} + \frac{1}{2}(x - x_0\ \ y - y_0)H_f(x_0, y_0)\binom{x-x_0}{y-y_0}$,
das Taylorpolynom 2. Ordnung im Entwicklungspunkt (x_0, y_0).

(b) Die stationären Punkte sind gegeben durch $\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} -3y^2 + 3x^2 \\ 4y^3 - 6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die erste Gleichung ist gleichbedeutend mit $y = x$ oder $y = -x$. Die zweite Gleichung $y(2y^2 - 3x) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn $y = 0$ oder $x = \frac{2}{3}y^2$, wegen $x^2 = y^2$ also $1 = \frac{2}{3}x$, bzw. $x = \frac{3}{2}$. Die drei Lösungen (x, y) dieses nichtlinearen Gleichungssystems sind also $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $P_3 = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.
Die Hessematrix von f ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{pmatrix}.$$

P_1: $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mit dieser Hessematrix ist keine Aussage über die Art des stationären Punktes möglich. Es gilt aber $f(x, 0) = x^3$, somit ist P_1 ein Sattelpunkt.
P_2: $H_f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist positiv definit, da beide Eigenwerte positiv sind. Dies erhält man durch ausrechnen ($9\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$), oder durch Berechnen der Determinante (81) und Betrachten der Diagonaleinträge. Beide sind positiv, also müssen auch beide Eigenwerte positiv sein. Bei P_2 ist also ein lokales Minimum.
P_3: f ist symmetrisch bezüglich y, somit ist auch bei P_3 ein lokales Minimum.
f besitzt keine globalen Extremwerte, da $f(x, 0) = x^3$ offenbar nach oben und unten unbeschränkt ist.

(c) f ist als Polynom stetig. Also gibt es in dem abgeschlossenen Rechteck sowohl ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.
Für das Minimum gibt es im Inneren P_2 und P_3 als Kandidaten. Es gilt $f(P_2) = f(P_3) = -\frac{27}{16} = -1.6875$. Für den Rand betrachten wir zunächst die Werte an den Ecken,

$$f(-\tfrac{5}{2}, \pm 2) = \frac{243}{8} = 30.375, \qquad f(\tfrac{5}{2}, \pm 2) = \frac{13}{8} = 1.625.$$

Entlang der vier Kanten müssen wir die folgenden Funktionen auf Maxima und Minima untersuchen:

$$[-\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{2}] \ni x \mapsto f(x, 2) = f(x, -2) = 16 - 12x + x^3.$$

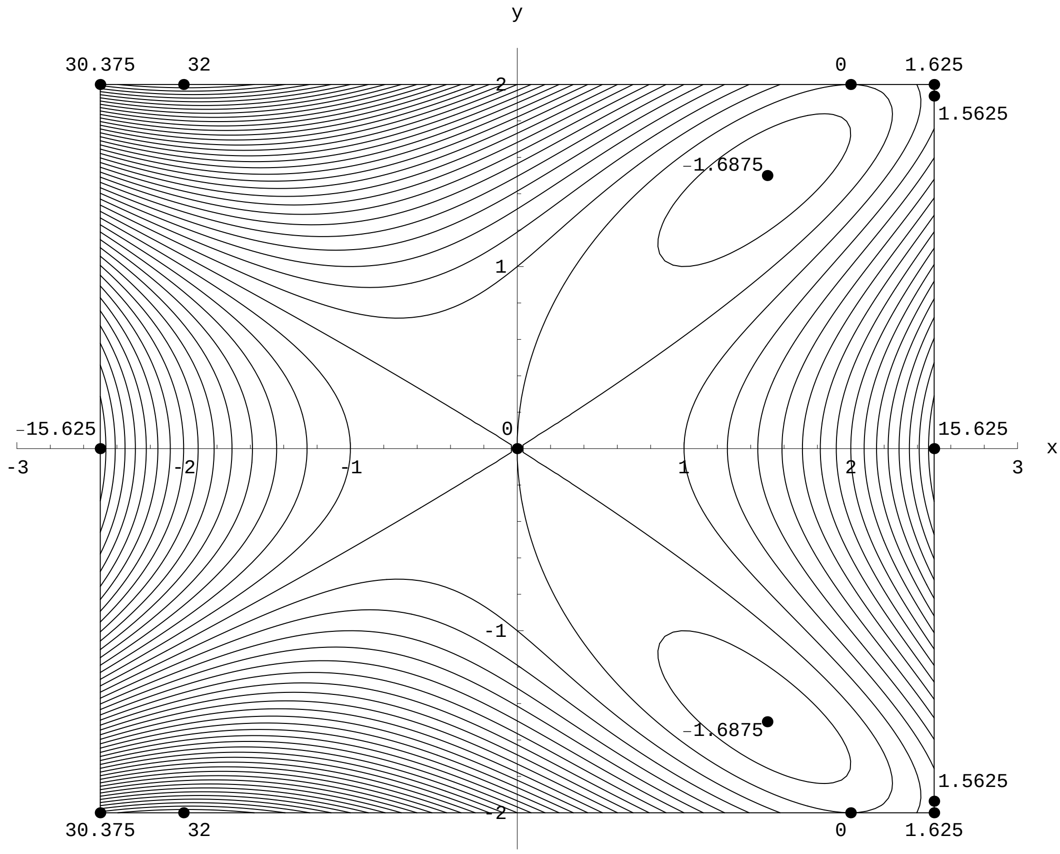
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \pm 2) = 3x^2 - 12 = 0$ ergibt $x = \pm 2$. Offenbar ist bei $x = -2$ ein lokales Maximum und bei $x = 2$ ein lokales Minimum (obiger Funktion, nicht notwendigerweise von f). Es gilt $f(-2, 2) = 32$ und $f(2, 2) = 0$.
Für konstantes $x = -\frac{5}{2}$ haben wir

$$[-2, 2] \ni y \mapsto f(-\tfrac{5}{2}, y) = y^4 + \tfrac{15}{2}y^2 - \tfrac{125}{8}.$$

Aus $0 = \frac{\partial f}{\partial y}(-\frac{5}{2}, y) = 4y^3 + 15y$, folgt $y = 0$ für reelle y. Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{5}{2}, y) = 12y^2 + 15$, gilt, dass bei $y = 0$ ein lokales Minimum ist, $f(-\frac{5}{2}, 0) = -\frac{125}{8}$.
Für konstantes $x = \frac{5}{2}$ haben wir

$$[-2, 2] \ni y \mapsto f(\tfrac{5}{2}, y) = y^4 - \tfrac{15}{2}y^2 + \tfrac{125}{8}.$$

Aus $0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{5}{2}, y) = 4y^3 - 15y$, folgt $y = 0$ oder $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$. Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{5}{2}, y) = 12y^2 - 15$, gilt, dass bei $y = 0$ ein lokales Minimum ist, und bei $\pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$ jeweils ein lokales Maximum ist, $f(\frac{5}{2}, 0) = \frac{125}{8} = 15.625$ und $f(\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{15}) = \frac{25}{16} = 1.5625$.
Zusammengefasst erhält man folgendes Bild:



Das absolute Maximum mit dem Wert 32 liegt also bei $(-2, \pm 2)$, das absolute Minimum, $-\frac{125}{8} = -15.625$ wird in $(-2.5, 0)$ angenommen.