Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer


**Mathematik 3 für Physik**
**(Analysis 2)**

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 9
(16.06.2010)

## Zentralübung

### 56. Differenzierbarkeit

Sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0,\\ 0, & (x,y)=0.\end{cases}$$

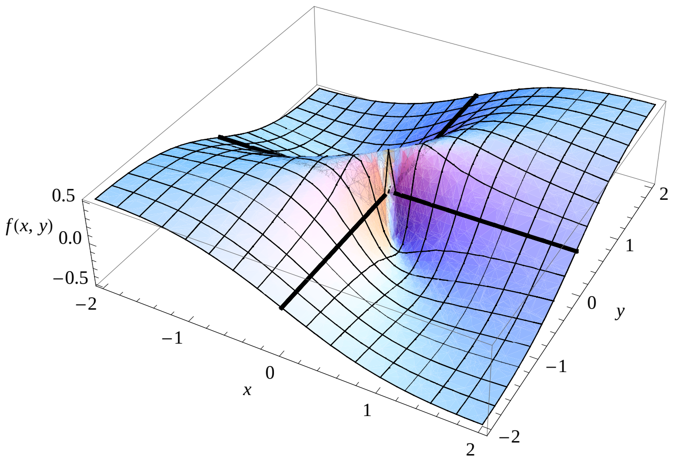
Man zeige:

(a) $f$ ist partiell differenzierbar.

(b) $f,\partial_1 f,\partial_2 f$ sind nicht stetig.

(c) Man berechne grad $\tilde f$ mit $\tilde f = f\circ\Phi$, $\Phi(r,\phi)=(r\cos\phi, r\sin\phi)$ (Polarkoordinaten).

Lösung:




(a) Für $(x,y)\neq 0$ ist

$$\partial_1 f(x,y)=y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \partial_2 f(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Wegen $f(x,0)=0=f(0,y)$ für $x,y\in\mathbb{R}$ finden wir am Nullpunkt:

$$\begin{aligned}\partial_x f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f((0,0)+h(1,0))-f(0,0)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(h,0)=0,\\ \partial_y f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f((0,0)+h(0,1))-f(0,0)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(0,h)=0\end{aligned}$$

(b) Die Funktion $f$ ist nicht stetig in $(0,0)$, wie man z.B. an der Folge $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\to 0$ sieht, denn $f(x_n,y_n)=\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}\neq 0$.

Natürlich sind auch die partiellen Ableitungen $\partial_x f,\partial_y f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ am Nullpunkt nicht stetig, denn

$$\lim_{y\to 0}\partial_x f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}=\infty\neq\partial_x f(0,0),\quad \lim_{x\to 0}\partial_y f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\neq\partial_y f(0,0).$$

(c) $f(r\cos\phi, r\sin\phi)=\cos\phi\sin\phi=\frac{1}{2}\sin 2\phi$ für $r\neq 0$. grad $\tilde f(r,\phi)=(0,\cos 2\phi)$. Die Funktion ist auf den punktierten Geraden durch den Nullpunkt jeweils konstant.

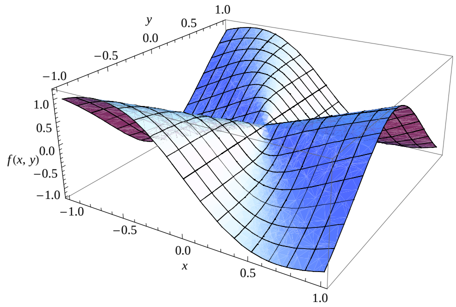
**57. Steigung entlang einer Kurve**

Gegeben ist die skalare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die $C^1$-Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

(a) Ist $f$ stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \partial_{\dot\gamma(t)} f(\gamma(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle.$$

(b) Die Formel gilt nicht für $f(x,y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq 0$, $f(0,0) = 0$.




LÖSUNG:

(a) OBdA zeigen wir die Gleichung bei $t = 0$ und gehen davon aus, dass $\gamma(0) = (0,0)$ ist. Somit ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\gamma(h)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma_1(h), \gamma_2(h)) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma_1(h), \gamma_2(h)) - f(\gamma_1(h), 0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(\gamma_1(h), 0) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{F_h(h) - F_h(0)}{h} + \partial_1 f(0,0)\dot\gamma_1(0),
\end{aligned}$$

Auf die Funktion $(h,r) \mapsto f(\gamma_1(h), \gamma_2(r)) = F_h(r)$ wenden wir den Mittelwertsatz an: Für jedes $h$ und $r \neq 0$ gibt es $\rho = \rho(h,r)$ mit $|\rho| \leq r$, so dass

$$\frac{F_h(r) - F_h(0)}{r} = F_h'(\rho) = \partial_2 f(\gamma_1(h), \gamma_2(\rho))\dot\gamma_2(\rho).$$

Da $\partial_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und $\lim\limits_{h\to 0} \rho(h,h) = 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{F_h(h) - F_h(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} F_h'(\rho(h,h)) = \lim_{h\to 0} \partial_2 f(\gamma_1(h), \gamma_2(\rho(h,h)))\dot\gamma_2(\rho(h,h)) \\
&= \partial_2 f(0,0)\dot\gamma_2(0).
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \partial_1 f(0,0)\dot\gamma_1(0) + \partial_2 f(0,0)\dot\gamma_2(0) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle.$$

Für die Richtungsableitung definieren wir für festes $t \in \mathbb{R}$ den affinen Weg $\tilde\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde\gamma(t+h) = \gamma(t) + h\dot\gamma(t)$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\partial_{\dot\gamma(t)} f(\gamma(t)) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma(t) + h\dot\gamma(t)) - f(\gamma(t))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\tilde\gamma(t+h)) - f(\tilde\gamma(t))}{h} \\
&= \frac{d}{dt}(f \circ \tilde\gamma)(t) = \langle \operatorname{grad} f(\tilde\gamma(t)), \dot{\tilde\gamma}(t)\rangle = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle.
\end{aligned}$$

(b) In Polarkoordinaten ist

$$\tilde{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r(\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin^2\varphi) = r\cos 3\varphi.$$

$f$ ist stetig, da

$$|f(x,y)| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|,$$

also sogar lipschitzstetig bei $(0,0)$. Die partiellen Ableitungen existieren für $(x,y) \neq 0$ und im Nullpunkt gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1, \\ \partial_2 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0, \end{aligned}$$

aber für $\gamma(t) = (t,t)$ ist

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = \frac{d}{dt}\frac{t^3-3t^3}{2t^2}\Big|_{t=0} = -1 \neq 1 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle = \langle \operatorname{grad} f(0), \dot{\gamma}(0)\rangle.$$

**58. Nabla-Operator, Identitäten**

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $C^2$-Funktionen. Der Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} : C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \quad \nabla f := \operatorname{grad} f$$

kann auch als operatorwertiger Vektor aufgefasst werden. Man definiert $\nabla \cdot v := \operatorname{div} v$ und $\nabla \times v := \operatorname{rot} v$. Zeigen Sie:

(a) $\nabla f(x) = J_f(x)^T, \quad \nabla \cdot v(x) = \operatorname{tr} J_v(x), \quad \forall w \in \mathbb{R}^3 : (\nabla \times v(x)) \times w = (J_v(x) - J_v(x)^T)w,$

(b) $\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times v) = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f.$

LÖSUNG:

(a) $J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & \partial_2 f(x) & \partial_3 f(x) \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f(x)^T.$

$\operatorname{tr} J_v(x) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 & \partial_3 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 & \partial_3 v_2 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & \partial_3 v_3 \end{pmatrix} (x) = \partial_1 v_1(x) + \partial_2 v_2(x) + \partial_3 v_3(x) = \operatorname{div} v(x) = \nabla \cdot v(x).$

$$(\nabla \times v(x)) \times w = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) w_3 - (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) w_2 \\ (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) w_1 - (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) w_3 \\ (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) w_2 - (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) w_1 \end{pmatrix},$$

$$(J_v(x) - J_v(x)^T)w = \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 & \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 & 0 & \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 \\ \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1 & \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

(b) $\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f \\ \partial_3 \partial_1 f - \partial_1 \partial_3 f \\ \partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^3,$

wegen des Satzes von Schwarz.

$\nabla \cdot (\nabla \times v) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$

$= (\partial_1 \partial_2 v_3 - \partial_1 \partial_3 v_2) + (\partial_2 \partial_3 v_1 - \partial_2 \partial_1 v_3) + (\partial_3 \partial_1 v_2 - \partial_3 \partial_2 v_1) = 0,$

wegen des Satzes von Schwarz.

$\nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \partial_1 \partial_1 f + \partial_2 \partial_2 f + \partial_3 \partial_3 f = \Delta f$

**Hausaufgaben**

**59. Ableitungen von Polynomen**

Die Dreifachfolge $(a_{klm})_{k,l,m\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ habe nur endlich viele von Null verschiedene Glieder. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} a_{klm} x_1^k x_2^l x_3^m.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x)$, und zeigen Sie, dass $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, $i, j = 1, 2, 3$.

(b) Sei nun $a_{klm} = 0$ für $k + l + m > 2$. Zeigen Sie, dass $f$ in der Form

$$f(x) = \tfrac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

geschrieben werden kann, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$.

(c) Drücken Sie $A, b, c$ in Teilaufgabe (b) durch die partiellen Ableitungen von $f$ im Nullpunkt aus.

Lösung:

(a) Alle auftretenden Summen sind endlich. Es sind also keine Grenzwertbetrachtungen nötig. Es ist

$$\partial_1 f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l,m=0}^{\infty} a_{klm} k x_1^{k-1} x_2^l x_3^m = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} (k+1) a_{(k+1)lm} x_1^k x_2^l x_3^m,$$

analog

$$\partial_2 f(x) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} (l+1) a_{k(l+1)m} x_1^k x_2^l x_3^m, \qquad \partial_3 f(x) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} (m+1) a_{kl(m+1)} x_1^k x_2^l x_3^m.$$

Somit ist $\operatorname{grad} f(x) = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (k+1)a_{(k+1)lm} \\ (l+1)a_{k(l+1)m} \\ (m+1)a_{kl(m+1)} \end{pmatrix} x_1^k x_2^l x_3^m$. Weiter erhält man

$$\begin{aligned}
\partial_1 \partial_1 f(x) &= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{(k+2)lm} x_1^k x_2^l x_3^m, \\
\partial_1 \partial_2 f(x) &= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} (k+1)(l+1) a_{(k+1)(l+1)m} x_1^k x_2^l x_3^m, \\
\partial_2 \partial_1 f(x) &= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} (l+1)(k+1) a_{(k+1)(l+1)m} x_1^k x_2^l x_3^m = \partial_1 \partial_2 f(x)
\end{aligned}$$

und analog für die anderen zweiten partiellen Ableitungen.

(b) $f$ ist von der Form

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_{000} + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 \\
&\quad + a_{200}x_1^2 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{020}x_2^2 + a_{011}x_2x_3 + a_{002}x_3^2 \\
&= a_{000} + \begin{pmatrix} a_{100} & a_{010} & a_{001} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{200} & \frac{1}{2}a_{110} & \frac{1}{2}a_{101} \\ \frac{1}{2}a_{110} & a_{020} & \frac{1}{2}a_{011} \\ \frac{1}{2}a_{101} & \frac{1}{2}a_{011} & a_{002} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit muss $c = a_{000}$, $b = \begin{pmatrix} a_{100} \\ a_{010} \\ a_{001} \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 2a_{200} & a_{110} & a_{101} \\ a_{110} & 2a_{020} & a_{011} \\ a_{101} & a_{011} & 2a_{002} \end{pmatrix}$ gewählt werden.

(c) Es ist $f(0) = c$, $\partial_1 f(0) = a_{100}$, $\partial_2 f(0) = a_{010}$, $\partial_3 f(0) = a_{001}$, also $\operatorname{grad} f(0) = b$ und $\partial_1 \partial_1 f(0) = 2a_{200}$, $\partial_1 \partial_2 f(0) = a_{110}$, usw. Insgesamt also $A = \big(\partial_i \partial_j f(0)\big)_{i,j=1,2,3}$.

**60. Differenzierbarkeit**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\partial_1 f, \partial_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass beide Funktionen stetig sind.

(b) Berechnen Sie $\partial_1\partial_2 f, \partial_2\partial_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass beide Funktionen nur auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ übereinstimmen.

LÖSUNG:

(a) $\partial_1 f(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $\partial_2 f(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ für $(x,y) \neq 0$.
Wegen $f(x,0) = f(0,y) = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$.
$\partial_1 f(x,y)$ ist offenbar stetig für $(x,y) \neq 0$. Bei $(0,0)$ folgt die (Lipschitz–)Stetigkeit aus

$$\begin{aligned} |\partial_1 f(x,y) - \partial_1(0,0)| &= |y|\frac{|x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2} \leq |y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq |y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \leq 2|(x,y)| \end{aligned}$$

(b) Für $(x,y) \neq 0$ erhält man $\partial_1\partial_2 f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3} = \partial_2\partial_1 f(x,y)$. Im Punkt $(0,0)$ muss man die Ableitungen explizit über den Limes des Differenzenquotienten berechnen,

$$\begin{aligned} \partial_1\partial_2 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\partial_2 f(h,0) - \partial_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1, \\ \partial_2\partial_1 f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\partial_1 f(0,h) - \partial_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = -1, \end{aligned}$$

**61. Radialsymmetrische Lösungen der Laplace-Gleichung**

Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ radialsymmetrisch, d.h. $f(x) = g(\|x\|)$ mit $g : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$.

(a) Ist $g \in C^2(\mathbb{R}^+)$, so gilt

$$\Delta f(x) = g''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|).$$

(b) Man bestimme mit Hilfe von (a) radialsymmetrische Lösungen der $n$-dimensionalen Laplace-Gleichung $\Delta f(x) = 0$. Hinweis: $\frac{g''(r)}{g'(r)} = \frac{d}{dr}(\ln |g'(r)|)$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} g(\|x\|) \overset{\text{Vorl.}}{=} \operatorname{div} \left( g'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \right) \\
&\overset{\text{Vorl.}}{=} \left\langle \operatorname{grad} g'(\|x\|), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + g'(\|x\|) \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|} \\
&\overset{\text{Vorl.}}{=} \left\langle g''(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + g'(\|x\|) \frac{n-1}{\|x\|} \\
&= g''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|).
\end{aligned}$$

(b) Aus $\Delta f(x) = 0$ folgt also $g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r) = 0$ für alle $r > 0$. Diese Gleichung ist z.B. für $g'(r) = 0$ erfüllt, d.h. $f(x) = const.$ Ist $g'(r) \neq 0$, so folgt mit dem Hinweis $\frac{d}{dr}(\ln |g'(r)|) = \frac{g''(r)}{g'(r)} = -\frac{n-1}{r}$, bzw., $\ln |g'(r)| = -(n-1) \ln |r| + C$, $C \in \mathbb{R}$. Exponenzieren ergibt

$$g'(r) = c r^{1-n}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

da $c = \pm e^C$ oder $c = 0$. Weitere Stammfunktionbildung ergibt

$$f(x) = g(\|x\|) = \begin{cases} \frac{c}{2-n} \|x\|^{2-n} + const, & n \neq 2 \\ c \ln \|x\| + const, & n = 2. \end{cases}$$

**62. Wärmeleitungsgleichung**

Sei $L := \{u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto u(x,t)$ ist $C^2$ und $\partial_t u = \frac{D}{2}\partial_x^2 u\}$ die Menge aller Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit Diffusionskonstante $D > 0$. Eine solche Lösung beschreibt zum Beispiel die zeitabhängige Temperaturverteilung in einem eindimensionalen Wärmeleiter.

(a) Zeigen Sie, dass $L$ ein Vektorraum ist.

(b) Finden Sie beschränkte Lösungen $u \in L$ der Form $u(x,t) = f(t)g(x)$ durch Separation der Abhängigkeit von $x$ und $t$.

(c) Sei $u_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\,t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2Dt}}$. Zeigen Sie, dass $u_0 \in L$ und skizzieren Sie $x \mapsto u_0(x,t)$ für verschiedene $t$ mit $D = 1$.

LÖSUNG:

(a) $L$ ist eine Teilmenge des Vektorraums der reellen Funktionen auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Da mit $u, v \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$ offenbar auch $u + \lambda v \in L$ liegt, ist $L$ sogar ein Untervektorraum.

(b) Sei $u(x,t) = f(t)g(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_2 u(x,t) &= \partial_t u(x,t) = f'(t)g(x) \\ \partial_1^2 u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t) = f(t)g''(x) \end{aligned}$$

$u \in L$ ist also gleichbedeutend mit $f'(t)g(x) = \frac{D}{2}f(t)g''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Für alle Punkte $(x,t)$ mit $u(x,t) \neq 0$ gilt daher

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{D}{2}\frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Es gibt also eine Konstante $\mu \in \mathbb{R}$, für die $f'(t) = \mu f(t)$ und $g''(x) = \frac{2\mu}{D}g(x)$. Lösungsbasis ist einmal $f(t) = e^{\mu t}$ mit $\mu < 0$, sonst wäre $f$ für $t > 0$ nicht beschränkt, und damit $g_1(x) = \cos kx$, $g_2(x) = \sin kx$ mit $k = \sqrt{-\frac{2\mu}{D}}$. In der Tat überprüft man leicht, dass

$$u(x,t) = Ae^{-\frac{D}{2}k^2t}\cos(x - x_0)$$

für $k, A, x_0 \in \mathbb{R}$ Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind. Damit ist $u$ auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ beschränkt

(c) Man berechnet für $t > 0$

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(x,t) &= \frac{D}{2}\frac{(x-x_0)^2 - Dt}{\sqrt{2\pi}(Dt)^{5/2}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2Dt}}, \\ \partial_x u_0(x,t) &= -\frac{x - x_0}{\sqrt{2\pi}(Dt)^{3/2}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2Dt}}, \\ \partial_x^2 u_0(x,t) &= \frac{(x-x_0)^2 - Dt}{\sqrt{2\pi}(Dt)^{5/2}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2Dt}}, \end{aligned}$$

was $\partial_t u_0 = \frac{D}{2}\partial_x^2 u_0$ verifiziert.