Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik (Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 8
(09.06.2010)

Zentralübung

49. Eine reguläre Kurve hat keinen Knick

Sei $G = \{(s, |s|) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Man beweise oder widerlege

(a) Es gibt eine stetig differenzierbare Kurve, deren Spur G ist.

(b) Es gibt eine reguläre Kurve, deren Spur G ist.

(c) G kann auf Bogenlänge parametrisiert werden.

Lösung:

(a) $f : \mathbb{R} \to G$, $t \mapsto (t^3, |t^3|)$ ist stetig differenzierbar, da $f'(t) = (3t^2, 3\mathrm{sgn}(t)t^2)$ auch bei $t = 0$ stetig ist.

(b) Nein. AnnahmeEs gibt eine reguläre Kurve $f : I \to G$. OBdA sei $f(0) = (0, 0)$. Nenne $g(t) := f(t)_1$, dann ist $f(t) = (g(t), |g(t)|)$.
Fall 1: $g'(0) \neq 0$. Dann ist $t \mapsto |g(t)|$ bei $t = 0$ nicht differenzierbar (Mittelwertsatz). Widerspruch zu stetig differenzierbar.
Begründung: oE sei $g'(0) > 0$. Dann gibt es $\epsilon > 0$ mit $g(t) > 0$ für $t \in]0, \epsilon[$ und $g(t) < 0$ für $t \in]-\epsilon, 0[$. somit ist $\lim_{t\to 0+} \frac{|g(t)|-|g(0)|}{t} = g'(0)$ und $\lim_{t\to 0-} \frac{|g(t)|-|g(0)|}{t} = -g'(0)$.
Fall 2: $g'(0) = 0$. Dann ist $|g|'(0) = 0$. 0 ist singulärer Punkt. Widerspruch zu regulär.

(c) Für $\tilde{f} : t \mapsto (\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{|t|}{\sqrt{2}})$ gilt: $|\tilde{f}'(t)| = |\frac{1}{\sqrt{2}}(1, \mathrm{sgn}(t))| = 1$ für $t \neq 0$.

50. Krümmung der Klothoide

Die Krümmung $\kappa(t)$ einer zweimal stetig differenzierbaren regulären Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3}.$$

Man zeige:

(a) Die Krümmung ist invariant unter zweimal stetig differenzierbaren Parametertransformationen.

(b) Eine Kurve, die einen Kreis mit Radius $r > 0$ durchläuft, hat die Krümmung $\frac{1}{r}$.

(c) Für die Klothoide

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \cos(s^2/2)ds, \int_0^t \sin(s^2/2)ds, 0 \right)$$

gilt $\kappa(t) = t$.

LÖSUNG:

(a) Ist $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\tilde\gamma = \gamma \circ t$, so gilt

$$\begin{aligned} \tilde\gamma\,'(s) &= \dot\gamma(t(s))t'(s), \\ \tilde\gamma\,''(s) &= \ddot\gamma(t(s))(t'(s))^2 + \dot\gamma(t(s))t''(s). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \tilde\kappa(s) &= \frac{\|\tilde\gamma\,'(s) \times \tilde\gamma\,''(s)\|}{\|\tilde\gamma\,(s)\|^3} = \frac{\|\dot\gamma(t(s))t'(s) \times (\ddot\gamma(t(s))(t'(s))^2 + \dot\gamma(t(s))t''(s)\|)}{\|\dot\gamma(t(s))t'(s)\|^3} \\ &= \frac{\|\dot\gamma(t(s)) \times \ddot\gamma(t(s))\|)}{\|\dot\gamma(t(s))\|^3} = \kappa(t(s)). \end{aligned}$$

(b) $x(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$ beschreibt einen Kreis mit Radius $r > 0$.
$\dot x(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0)$, $\ddot x(t) = (-r\cos t, -r\sin t, 0)$,
$\dot x(t) \times \ddot x(t) = (0, 0, r^2\sin^2 t, r^2\cos^2 t)$. Somit ist

$$\kappa(t) = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

(c) $\dot\gamma(t) = \cos(t^2/2), \sin(t^2/2), 0$, $\ddot\gamma(t) = (-t\sin(t^2/2), t\cos(t^2/2), 0)$,
$\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t) = (0, 0, t)$. Also ist $\kappa(t) = t$.

51. Rektifizierbare Wege

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so heißt

$$L(f) := \sup_{[a,b] \subset I} L(f|_{[a,b]}) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

die Bogenlänge von f. Ist $L(f) < \infty$, so ist f rektifizierbar.

(a) Ist f stetig differenzierbar, so ist die Länge von f durch das uneigentliche Integral

$$L(f) = \int_I \|\dot{f}(t)\| dt$$

gegeben.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{zt}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f rektifizierbar? Man berechne $L(f)$.

LÖSUNG:

(a) $(a, b) \mapsto L(f|_{[a,b]})$ ist monoton wachsend in b und monoton fallend in a, denn für $b' > b$ gibt es zu jeder Zerlegung Z von $[a, b]$ eine Zerlegung Z' von $[a, b']$, die als letztes Segment von b zu b' läuft, ansonsten aber identisch mit Z ist. Somit ist $L(f, Z') \geq L(f, Z)$ und damit auch für das Supremum über alle Zerlegungen $L(f|_{[a,b']}) \geq L(f|_{[a,b]})$. Ist nun z.B. $I =]c, d[$, $-\infty \leq c \leq d \leq +\infty$, so gilt

$$L(f) = \lim_{a \searrow c} \lim_{b \nearrow d} \int_a^b \|\dot{f}(t)\| dt = \int_c^d \|\dot{f}(t)\| dt.$$

(b) $|f'(t)| = |ze^{zt}| = |z|e^{\operatorname{Re} zt}$. Also ist

$$L(f) = \int_0^\infty |z|e^{\operatorname{Re} zt} dt \begin{cases} = \frac{|z|}{\operatorname{Re} z} \lim\limits_{r \to \infty} [e^{\operatorname{Re} zt}]_0^r = -\frac{|z|}{\operatorname{Re} z} & \text{für } \operatorname{Re} z < 0, \\ = \infty & \text{für } \operatorname{Re} z \geq 0. \end{cases}$$

Hausaufgaben

52. Zurückgelegte Wege

(a) Herrchen und Hund sind 100m von einem Baum entfernt. Herrchen geht mit 5km/h zu dem Baum. Gleichzeitig läuft sein Hund mit 15km/h zum Baum, dreht dort sofort um und läuft zurück zum Herrchen, dreht wieder zum Baum um, usw. Welche Strecke legt der Hund zurück?

(b) Zwei parallele Platten unendlicher Masse befinden sich im Abstand 2m. Die eine Platte bewegt sich mit 5cm/s auf die zweite, ruhende zu. Ein (punktförmiger) Ball schwebt zu Beginn in der Mitte zwischen den Platten. Welchen Gesamtweg legt der Ball bis zur Kollision der Platten zurück, wenn er von den Platten bei jedem Stoß elastisch reflektiert wird? Rechnen Sie nichtrelativistisch.

(c) Ist im relativistischen Fall die Wegstrecke, die der Ball bezüglich des Bezugssystems der ruhenden Platte zurücklegt, endlich oder unendlich?

LÖSUNG:

(a) 300m

(b) Sei s_n der Abstand der Platten bei der n-ten Reflexion, $n \in \mathbb{N}_0$, an der mit $w = .05[\mathrm{m/s}]$ bewegten Platte, $s_0 = 1$. Sei v_n die Geschwindigkeit des Balls vor der n-ten Reflexion an der bewegten Platte, also $v_n = 2nw$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Zeit zwischen $(n-1)$-ter und n-ter Reflexion an der bewegten Platte

$$\Delta t_n = \frac{2s_{n-1}}{w + v_n}$$

(spiegelt man an der ruhenden Platte, so startet der Ball bei $-s_{n-1}$ mit der Geschwindigkeit v_n und die bewegte Platte bei $+s_{n-1}$ mit der Geschwindigkeit $-w$).
Somit ist

$$s_n = s_{n-1} - \Delta t_n w = s_{n-1}\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) = \frac{2n-1}{2n+1} s_{n-1},$$

d.h. $s_1 = \frac{1}{3}s_0$, $s_2 = \frac{3}{5}s_1 = \frac{1}{5}s_0$, $\ldots$, also $s_n = \frac{1}{2n+1}s_0$ (Induktion!). Die vom Ball zurückgelegte Gesamtstrecke ist also

$$s_0 + 2s_1 + 2s_2 + \cdots = s_0(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \cdots) = -s_0 + 2s_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \infty.$$

Die Kurve, die die Position des Balls in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, ist also nicht rektifizierbar, der Ball legt in endlicher Zeit eine unendlich große Strecke zurück.

(c) Im relativistischen Fall ist die Geschwindigkeit des Balls immer kleiner c. Da zwischen erstem Stoß und Treffen der Platten nur 20s vergehen legt der Ball **höchstens** die Strecke $20\mathrm{s} \cdot c$ also ca. 6 Millionen Kilometer zurück. Sie ist also in jedem Fall endlich.

53. Rektifizierbar oder nicht?

Sei $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ und $G_f \subset \mathbb{R}^2$ der Graph von f. Man zeige: G_f ist genau dann rektifizierbar, wenn $\alpha > 1$ ist.
HINWEIS: Zeigen und benutzen Sie $|b| - |a| \leq \sqrt{1 + (a-b)^2} \leq 1 + |a| + |b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

Es ist

$$|b| - |a| \leq |b-a| = \sqrt{(b-a)^2} \leq \sqrt{1+(b-a)^2} \leq 1 + |b-a| \leq 1 + |b| + |a|$$

wegen der Monotonie der Wurzelfunktion und $\|(a,b)\|_2 \leq \|(a,b)\|_1$.
Wir untersuchen das uneigentliche Bogenlängenintegral

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (\alpha x^{\alpha-1} \sin \tfrac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \tfrac{1}{x})^2}dx.$$

Für $\alpha > 1$ ist nach dem Hinweis

$$\begin{aligned} L &\leq \int_0^1 (1 + \alpha x^{\alpha-1}|\sin \tfrac{1}{x}| + x^{\alpha-2}|\cos \tfrac{1}{x}|)dx \leq 1 + \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1}dx + \int_0^1 x^{\alpha-2}dx \\ &\leq 1 + \alpha + [\tfrac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}]_0^1 = 1 + \alpha + \tfrac{1}{\alpha-1} < \infty. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 51 der Zentralübung ist f also rektifizierbar.
Für $\alpha \leq 0$ wählt man die Zerlegung $x_n = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $n = 1, \ldots, N+1$. Dann ist $f(x_n) = x_n^\alpha (-1)^n$ und damit

$$L \geq \sum_{n=1}^N \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (f(x_{n+1}) - f(x_n))^2} \geq \sum_{n=1}^N 2 = 2N \to \infty \text{ für } N \to \infty$$

Für $0 < \alpha \leq 1$ gilt, wenn man $|b| - |a| \leq |b-a| \leq \sqrt{1+(b-a)^2}$ benutzt,

$$\begin{aligned} L &\geq \int_0^1 (x^{\alpha-2}|\cos \tfrac{1}{x}| - \alpha x^{\alpha-1}|\sin \tfrac{1}{x}|)dx \geq \int_0^1 x^{\alpha-2}|\cos \tfrac{1}{x}|dx - C \\ &\overset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_1^\infty \frac{|\cos y|}{y^\alpha}dy - C \geq \sum_{n=2}^\infty \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\cos y|}{((n+\frac{1}{2})\pi)^\alpha}dy - C \\ &\geq \pi^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^\alpha} - C = \infty, \end{aligned}$$

wobei $C = \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}dx = [x^\alpha]_{0+}^1 = 1$ gewählt werden kann.

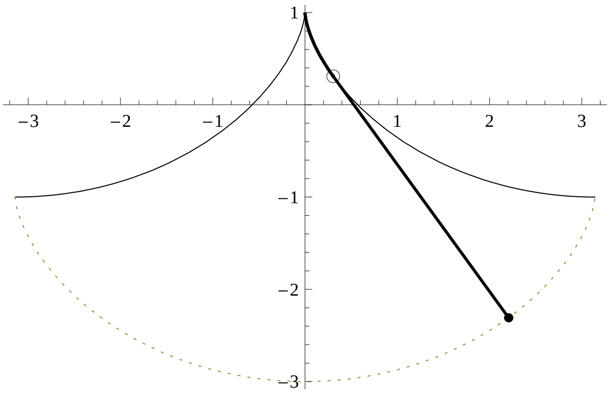
54. Zykloide

Eine Zykloide entsteht durch Überlagerung einer geradlinigen und einer kreisförmigen Bewegung mit gleichem Geschwindigkeitsbetrag. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, \cos t)$ ist z.B. eine solche Zykloide.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge von $\gamma_1 := \gamma|_{[0,2\pi]}$. HINWEIS: $\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = |\sin \frac{t}{2}|$.

(b) Parametrisieren Sie γ_1 auf Bogenlänge.

(c) Zeigen Sie, dass sich das in $(0,1)$ aufgehängte Zykloidenpendel mit Fadenlänge 4, dessen Faden sich an die Zykloide γ anschmiegt, siehe Abbildung, wieder entlang einer (verschobenen) Zykloide bewegt. HINWEIS: $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$.



LÖSUNG:

(a) $\dot\gamma(t) = (1 - \cos t, -\sin t)$, $|\dot\gamma(t)| = \sqrt{2 - 2\cos t} = |2 \sin \frac{t}{2}|$.

$$L(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} 2 \sin \tfrac{t}{2} dt = [-4 \cos \tfrac{t}{2}]_0^{2\pi} = 4 - (-4) = 8.$$

(b) $l(t) = \int_0^t 2 \sin \frac{s}{2} ds = [-4 \cos \frac{s}{2}]_0^t = 4 - 4 \cos \frac{t}{2}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Die Umkehrfunktion ist

$$t(s) := l^{-1}(s) = 2 \arccos(1 - \tfrac{s}{4}).$$

Somit ist

$$\tilde\gamma(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} t(s) - \sin t(s) \\ \cos t(s) \end{pmatrix}$$

die natürliche Parametrisierung des Zykloidenbogens $\gamma([0, 2\pi])$.

(c) Aus Symmetriegründen genügt es, Auslenkungen des Pendels nach rechts zu betrachten. Wir parametrisieren die Pendelposition durch die Bogenlänge s, die der Faden entlang der begrenzenden Zykloide verläuft. Die Schnur löst sich also am Punkt $\tilde\gamma(s)$ von der Zykloide und verläuft weiter tangential, also in Richtung $\tilde\gamma\,'(s)$. Das Gewicht befindet sich also bei

$$x(s) = \tilde\gamma(s) + (4 - s)\tilde\gamma\,'(s) = \gamma(t(s)) + (4 - s)\dot\gamma(t(s))t'(s).$$

Sei nun $\tilde x(t) = x(l(t))$. Mit $t'(l(t)) = \frac{1}{l'(t)}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\tilde x(t) &= \begin{pmatrix} t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{4 - l(t)}{l'(t)} \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 2\frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \\ \cos t - 2\frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t + 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \\ \cos t - 4 \cos^2 \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t - 4 + 4 \sin^2 \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ -\cos t - 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t - \pi) - \sin(t - \pi) \\ \cos(t - \pi) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also offenbar wieder ein nach unten und rechts verschobene Zykloide.

55. Kettenlinie

Eine in den Punkten $(\pm 1, 0) \in \mathbb{R}^2$ eingespannte Kette nimmt im homogenen Schwerefeld die Form einer Kettenlinie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh a)$ mit $a > 0$ an.

(a) Man berechne die Bogenlänge der Kettenlinie und den Durchhang in Abhängigkeit von a.

(b) Wie stark hängt eine Kette ungefähr durch, wenn sie nur einen Meter länger ist, als die 2km breite Schlucht, die sie überspannt?

LÖSUNG:

(a) $L(a) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2(ax)}dx = \int_{-1}^{1} \cosh(ax)dx = [\frac{1}{a}\sinh(ax)]_{-1}^{1} = \frac{2}{a}\sinh a$. Der Durchhang ist $f(0) = \frac{1}{a}(1 - \cosh a)$.

(b) Bestimmt wurde $L(a) = \frac{2}{a}\sinh a = \frac{2}{a}(a + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{120}a^5 + \cdots) \approx 2 + \frac{1}{3}a^2$, wenn $a \ll 1$. Es gilt ungefähr $a \approx \sqrt{3(L-2)}$. Ist $L = 2.001$[km] so erhält man

$$a \approx \sqrt{.003} \approx 0.055.$$

In der Tat ergibt $L(0.055) = 2.00101\cdots$ und $L(0.054) = 2.00097\cdots$ (Taschenrechner). Da $L(a)$ streng monoton steigend ist ($L'(a) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{12}a^3 + \cdots > 0$ für $a > 0$), gilt $a \in [0.054, 0.055]$. Der maximale Durchhang ist dann, bei $x = 0$, also

$$\frac{1}{a}(1 - \cosh a) \approx \frac{1}{a}(-\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{24}a^4 - \cdots) \approx \frac{1}{2}a,$$

d.h. ungefähr 27m. Mit $a \in [0.054, 0.055]$ erhält man die Schranken für den Durchhang $d \in [27, 27.51]$ in Metern.