TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/
Sommersemester 2010
Lösungsblatt 7
(02.06.2010)

Zentralübung

42. Lineares Differentialgleichungssystem I

Lösen Sie das System $\dot{x} = Ax$ für folgendes A und $x(0)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Wir bestimmen einen Eigenvektor zum (einfachen) Eigenwert $\lambda_1 = 2$,

$$(A - \lambda_1 E)x_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x_1 = 0, \quad \text{also z.B.} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner bestimmen wir einen Eigenvektor zum (doppelten) Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

$$(A - \lambda_2 E)x_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_2 = 0, \quad \text{also z.B.} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schließlich bestimmen wir einen Hauptvektor der Stufe 1 zum Eigenwert λ_2 durch Lösen von

$$(A - \lambda_2 E)x_3 = x_2$$

also $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die drei Vektoren $\{x_1, x_2, x_3\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Die darstellende Matrix von A bezüglich dieser Basis ist in Jordan-Normalform,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es ist $Ax_1 = 2x_1$, $Ax_2 = x_2$, $Ax_3 = x_3 + x_2$. Das Matrixexponential ist

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix},$$

es gilt also $e^{tA}x_1 = e^{2t}x_1$, $e^{tA}x_2 = e^t x_2$ und $e^{tA}x_3 = e^t(tx_2 + x_3)$

Entwickeln wir nun die Anfangsbedingung $x(0)$ bzgl. der Basis (x_1, x_2, x_3), $x(0) = x_1 - 2x_3$, so erhalten wir

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}x(0) = \mathrm{e}^{tA}(x_1 - 2x_3) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\mathrm{e}^t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

43. Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld

Die Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ eines Teilchens der Ladung e und der Masse m gehorcht im konstanten magnetischen Feld B der Bewegungsgleichung

$$\dot{v} = v \times b$$

mit $b = \frac{e}{m} B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. $\omega = |b|$ ist die Zykloton(kreis)frequenz.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Abbildung $v \mapsto v \times b$.

(b) Zu $v \in \mathbb{R}^3$ sei $v_\| = \frac{v\cdot b}{|b|^2} b$, $v_\perp = v - v_\|$. Man zeige für $t \in \mathbb{R}$, dass

$$e^{tA} v = v_\| + \cos(\omega t) v_\perp + \sin(\omega t)\omega^{-1}(v \times b).$$

Interpretieren Sie e^{tA} geometrisch. Hinweis: Man wähle die rechtshändige Orthonormalbasis (c_1, c_2, c_3) des $\mathbb{R}^3$, so dass $b = \omega c_3$ und $v = v_1 c_1 + v_3 c_3$, $v_1, v_3 \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) $$v \times b = \begin{pmatrix} v_2 b_3 - v_3 b_2 \\ v_3 b_1 - v_1 b_3 \\ v_1 b_2 - v_2 b_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir identifizieren alle Vektoren mit ihren Koordinatenvektoren bezüglich (c_1, c_2, c_3) und betrachten entsprechend die darstellenden Matrizen auch bezüglich dieser Basis. In der laut Hinweis gewählten ONB ist $b = (0, 0, \omega)$. Also ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und damit} \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $v = (v_1, 0, v_3)$ also

$$e^{tA} v = \begin{pmatrix} v_1 \cos\omega t \\ -v_1 \sin\omega t \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \cos(\omega t) c_1 - v_1 \sin(\omega t) c_2 + v_3 c_3.$$

Andererseits ist $v_\| = v_3 c_3$, $v_\perp = v_1 c_1$ und $\omega^{-1} v \times b = v_1(c_1 \times c_3) = -v_1 c_2$, und damit

$$v_\| + \cos(\omega t) v_\perp + \sin(\omega t)\omega^{-1}(v \times b) = v_3 c_3 + \cos(\omega t) v_1 c_1 - \sin(\omega t) v_1 c_2,$$

womit die Gleichheit gezeigt ist. e^{At} ist eine Rotation um die von b aufgespannte Achse mit Winkel ωt im Uhrzeigersinn.

44. Inhomogene Matrixdifferentialgleichung

Zeigen Sie, dass die matrixwertige Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}R_t = AR_t + F_t, \quad R_0 = E$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig, die Lösung

$$R_t = e^{tA} + \int_0^t e^{(t-s)A} F_s ds$$

besitzt.

Lösung:

Beweis durch Rechnung: $R_0 = e^0 E = E$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_t &= \frac{d}{dt}\left(e^{tA} + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}F_s ds\right) = Ae^{tA} + Ae^{tA}\int_0^t e^{-sA}F_s ds + e^{tA}e^{-tA}F_t \\
&= A\left(e^{tA} + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}F_s ds\right) + F_t = AR_t + F_t
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

45. Inhomogene Differentialgleichung höherer Ordnung

Gegeben ist die Differentialgleichung $y^{(4)} + 4y = e^t$.

(a) Man bestimme den Lösungsraum der homogenen Gleichung.

(b) Geben Sie alle Lösungen obiger Differentialgleichung an.
HINWEIS: "Erraten" Sie eine Lösung

LÖSUNG:

(a) Das Polynom $\lambda^4 + 4$ hat die 4 Nullstellen $\pm 1 \pm i$. Eine reelle Basis des Lösungsraums ist also $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^t \cos t, e^t \sin t)$.

(b) Der Ansatz $y_p(t) = \alpha e^t$ eingesetzt ergibt

$$\alpha e^t + 4\alpha e^t = e^t,$$

also ist $y_p(t) = \frac{1}{5}e^t$ eine partikuläre Lösung. Somit ist der Lösungsraum

$$L = y_p + \operatorname{span}(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^t \cos t, e^t \sin t).$$

46. Exponential einer Jordanmatrix

Gegeben ist (0-Einträge werden nicht geschrieben)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & \\ & & & & 3 & 1 & & & \\ & & & & & 3 & & & \\ & & & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A und in Tabellenform alle Eigenwerte mit zugehöriger algebraischer und geometrischer Vielfachheit und ihre Eigen- und Hauptvektoren (mit Stufe) an.

(b) Geben Sie das Matrixexponential e^{tA} an.

LÖSUNG:

(a) $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)^5$.

EW	alg. Vielf.	geom. Vielf.	EV	HV
1	2	1	e_1	$e_2(1.)$
2	2	2	e_3, e_4	–
3	5	2	e_5, e_7	$e_6, e_8(1.),\ e_9(2.)$

(b)

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & & & & & & & \\ & e^t & & & & & & & \\ & & e^{2t} & & & & & & \\ & & & e^{2t} & & & & & \\ & & & & e^{3t} & te^{3t} & & & \\ & & & & & e^{3t} & & & \\ & & & & & & e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ & & & & & & & e^{3t} & te^{3t} \\ & & & & & & & & e^{3t} \end{pmatrix}$$

47. Lineares Differentialgleichungssystem II

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme eine Jordan-Normalform J von A und die zugehörige Basis aus Eigen- und Hauptvektoren.

(b) Man berechne e^{tJ} und gebe eine Lösungsbasis von $\dot{x} = Ax$ an.

(c) Man löse die AWA $\dot{x} = Ax$ mit $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1)$.

LÖSUNG:

(a) Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (3 - \lambda)^4 (5 - \lambda).$$

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$w = (1, 0, 0, 0, 2)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 5.

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u = e_1$ und $v = e_2 - e_3$ sind also Eigenvektoren. Damit $(A - 3E)^2 x = 0$ muss $(A - 3E)x = \alpha u + \beta v$ gelten. Wir lösen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nur für $\beta = 0$ erhält man mit $\alpha = 1$ die einzige Lösung $u_1 = (0, 0, 0, 2, -1)$. Für den Hauptvektor zweiter Stufe löst man $(A - 3E)x = u_1$,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und erhält als Lösung $u_2 = (0, 0, 1, 0, -1)$.

(u, u_1, u_2, v, w) ist somit eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren, die darstellende Matrix von A bezüglich dieser Basis ist in Jordanform,

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = BJB^{-1} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} u & u_1 & u_2 & v & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

(b) Es ist

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2}{2}e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die Lösungsbasis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{tA}u = e^{3t}u \\ x_2(t) &= e^{tA}u_1 = e^{3t}(u_1 + tu) \\ x_3(t) &= e^{tA}u_2 = e^{3t}(u_2 + tu_1 + \tfrac{t^2}{2}u) \\ x_4(t) &= e^{tA}v = e^{3t}v \\ x_5(t) &= e^{tA}w = e^{5t}w \end{aligned}$$

(c) $e^{tA} = Be^{tJ}B^{-1}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen nicht e^{At} explizit, sondern stellen $x(0)$ in der Basis dar, $x(0) = \alpha_1 u + \alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_2 + \alpha_4 v + \alpha_5 w$, bzw., $B\alpha = x(0)$. Man löst also

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{7}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{array}\right).$$

Das AWA hat also die Lösung $x(t) = -\frac{1}{4}x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) + 2x_3(t) + x_4(t) + \frac{7}{4}x_4(t)$.

48. Geladenes Teilchen im konstanten elektromagnetischen Feld

Ein Teilchen der Ladung e und der Masse m gehorcht im konstanten magnetischen Feld B und konstanten elektrischen Feld E den Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = v \times b + f, \quad x(0), v(0) \in \mathbb{R}^3$$

mit $b = \frac{e}{m} B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $f = \frac{e}{m} E \in \mathbb{R}^3$. $\omega = |b|$ ist die Zykloton(kreis)frequenz. Sei $b = (0, 0, \omega)$, $v(0) = (v_0, 0, 0)$, $v_0 > 0$ und $x(0) = 0$. Bestimmen Sie $v(t)$, $x(t)$ für

(a) $f = 0$, (b) $f = (0, 0, 1)$, (c) $f = (0, 1, 0)$,

und beschreiben Sie die möglichen Bahnkurven.

Lösung:

(a) Aus der Zentralübung hat man

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \omega t \\ -v_0 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentenweises aufintegrieren ergibt

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s) ds = \begin{pmatrix} r \sin \omega t \\ -r + r \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Zyklotronradius $r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{m v_0}{e|B|}$. Dies ist eine Kreisbewegung im Uhrzeigersinn in der xy-Ebene mit Mittelpunkt $(0, -r, 0)$ und Radius r.

(b) Aus der Vorlesung hat man mit $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{tA} v(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f ds \\ &= \begin{pmatrix} v_0 \cos \omega t \\ -v_0 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos \omega(t-s) & \sin \omega(t-s) & 0 \\ -\sin \omega(t-s) & \cos \omega(t-s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ds\ f \\ &= \begin{pmatrix} v_0 \cos \omega t \\ -v_0 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sin \omega t}{\omega} & \frac{1-\cos \omega t}{\omega} & 0 \\ -\frac{1-\cos \omega t}{\omega} & \frac{\sin \omega t}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} f. \end{aligned}$$

Für $f = (0, 0, 1)$ also $v(t) = (v_0 \cos \omega t, -v_0 \sin \omega t, t)$ und damit $x(t) = (r \sin \omega t, -r + r \cos \omega t, \frac{1}{2} t^2)$, d.i. eine in z-Richtung konstant beschleunigte Schraubenlinie.

(c) Für $f = (0, 1, 0)$ ergibt sich mit dem Ergebnis in (b)

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} + (v_0 - \frac{1}{\omega}) \cos \omega t \\ -(v_0 - \frac{1}{\omega}) \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{\omega} + r' \sin \omega t \\ -r' + r' \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

also eine Kreisbewegung mit Radius $r' = \frac{1}{\omega}(v_0 - \frac{1}{\omega})$ um den konstant in x-Richtung bewegten Mittelpunkt $(\frac{1}{\omega} t, -r', 0)$, also eine Zykloide, die senkrecht zum elektrischen Feld verläuft.