Zentralübung

35. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

(a) Der Ableitungsoperator $\partial_t f = f'$ ist eine lineare Abbildung von $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ nach $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Bestimmen Sie seinen Kern.

(b) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume von $\partial_t : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(c) Zeigen Sie, dass $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ Hauptvektoren von ∂_t sind.

(d) Das komplexe Polynom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, habe die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$, $n_1 + \cdots + n_k = n$. Bestimmen Sie den Kern von $p(\partial_t)$.

Lösung:

Vorbemerkung:
Ist $A : V \to V$ $\mathbb{C}$-linear, so heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ **Eigenwert** von A, wenn $\ker(A - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}$ ist. $v \in \ker(A - \lambda\,\mathrm{id}) \setminus \{0\}$ heißt **Eigenvektor** von A (zum Eigenwert λ). Gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $v \in \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1} \setminus \{0\}$ so heißt v **Hauptvektor** (k-ter Stufe) von A (zum Eigenwert λ).
Hauptsatz über quadratische Matrizen: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren.

(a) $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist offenbar linearer Unterraum z.B. von $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. $\partial_t(\alpha f + g) = \alpha\partial_t f + \partial_t g$ ist klar für $\alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Somit ist ∂_t lineare Abbildung. $\partial_t f = 0$ bedeutet $f' = 0$, bzw. f konstant. Die konstanten Funktionen bilden also den Kern von ∂_t.

(b) $\partial_t f = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt natürlich die Lösungen $f(t) = c\,e^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{C}$, m.a.W. $t \mapsto e^{\lambda t}$ ist ein Eigenvektor von ∂_t zum Eigenwert λ. Es gibt keine weiteren: ist $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ Eigenvektor von ∂_t zum Eigenwert λ, so folgt $\frac{d}{dt}(f(t)e^{-\lambda t}) = f'(t)e^{-\lambda t} - \lambda f(t)e^{-\lambda t} = 0$, also $f(t)e^{-\lambda t} = const$.

Jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist also Eigenwert von ∂_t mit geometrischer Vielfachheit 1.

(c) $(\partial_t - \lambda\,\mathrm{id})t^k e^{\lambda t} = kt^{k-1}e^{\lambda t} + t^k\lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = kt^{k-1}e^{\lambda t}$. Somit ist $(\partial_t - \lambda\,\mathrm{id})^k t^k e^{\lambda t} = k!e^{\lambda t}$ und$(\partial_t - \lambda\,\mathrm{id})^{k+1} t^k e^{\lambda t} = 0$. $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ ist also ein Hauptvektor (k-ter Stufe) von ∂_t zum Eigenwert λ.

(d) Es ist $p(\partial_t) = a_n \prod_{j=1}^{k} (\partial_t - \lambda_j\,\mathrm{id})^{n_j}$, wobei die Reihenfolge der Multiplikation keine Rolle spielt, wie man durch Ausmultiplizieren leicht sieht. Wegen $(\partial_t - \lambda_j\,\mathrm{id})^{n_j}(t^l e^{\lambda_j t}) = 0$ für $l = 0, \ldots, n_j - 1$ liegen im Kern die n linear unabhängigen Funktionen $t \mapsto t^l e^{\lambda_j t}$, $l = 0, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, k$. Da der Kern von $\partial_t - \lambda\,\mathrm{id}$ eindimensional ist, siehe (b), kann der Kern des n-fachen Produkts solcher linearen Abbildungen höchstens die Dimension n haben. Da die oben genannten Funktionen linear unabhängig sind, haben wir schon eine Basis des Kerns von $p(\partial_t)$ gefunden.

36. Matrixfunktionen für symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann besitzt A eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $b_1, \cdots, b_n$ zu den jeweiligen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und liegen alle Eigenwerte in M, so definiert man

$$f(A) := \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) b_j b_j^T.$$

(a) $E = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j b_j^T$, $A = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_j b_j^T$.

(b) Ist $g : M \to \mathbb{R}$, so gilt $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$, $(fg)(A) = f(A)g(A)$ und falls definiert $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$.

(c) Sei M offen, f differenzierbar und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt, falls $f(tA)$ definiert ist, für die Ableitung $\frac{d}{dt} f(tA) = Af'(tA)$.

(d) Die Matrix-Differentialgleichung $\frac{d}{dt} C(t) = AC(t)$ mit dem Anfangswert $C(0) = E$ hat die Lösung $C(t) = \exp(tA)$.

LÖSUNG:

Man beachte, dass für eine Orthonormalbasis $b_i^T b_j = b_i \cdot b_j = \delta_{ij}$ gilt. Wir identifizieren $b_j \in \mathbb{R}^n$ mit einer $n \times 1$-Matrix und den Zeilenvektor b_j^T mit einer $1 \times n$ Matrix.

(a) Es genügt, die Gleichheit jeweils für alle Basisvektoren zu zeigen.

$\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j b_j^T\right) b_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j (b_j^T b_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j \delta_{ji} = b_i = Eb_i$ für $i = 1, \dots, n$.

$\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_j b_j^T\right) b_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_j (b_j^T b_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \delta_{ji} = \lambda_i b_i = Ab_i$ für $i = 1, \dots, n$.

(b) $(f+g)(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (f(\lambda_j) + g(\lambda_j)) b_j b_j^T = \sum\limits_{j=1}^{n} f(\lambda_j) b_j b_j^T + \sum\limits_{j=1}^{n} g(\lambda_j) b_j b_j^T = f(A) + g(A)$.

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) b_j b_j^T \sum_{j=1}^{n} g(\lambda_j) b_j b_j^T = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_j) g(\lambda_i) b_j b_j^T b_i b_i^T \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_j) g(\lambda_i) b_j \delta_{ji} b_i^T = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) g(\lambda_j) b_j b_j^T = (fg)(A). \end{aligned}$$

$g(f(A)) = \sum\limits_{j=1}^{n} g(f(\lambda_j)) b_j b_j^T = \sum\limits_{j=1}^{n} (g \circ f)(\lambda_j) b_j b_j^T = (g \circ f)(A)$.

(c) $\frac{d}{dt} f(tA) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(f((t+h)A) - f(tA)) = \lim\limits_{h\to 0} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{h}(f((t+h)\lambda_j) - f(t\lambda_j)) b_j b_j^T = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f'(t\lambda_j) b_j b_j^T = Af'(tA)$.

(d) Offenbar ist $C(0) = \exp(0A) = E$ und $\frac{d}{dt} C(t) = \frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = AC(t)$.

37. Periodische Anregung eines gedämpften harmonischen Oszillators

Gegeben ist die Gleichung des schwach gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} = -(\omega_0^2 x + 2\kappa\dot{x}) + f(t), \qquad (*)$$

$0 < \kappa < \omega_0$, der mit der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ getrieben wird.

(a) Geben Sie für $f = 0$ alle Lösungen von (*) an. Welche davon sind periodisch?

(b) Seien $\hat{f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von f und $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{int}$ konvergiere normal. Zeigen Sie dass es genau eine 2π-periodische Lösung von (*) gibt.
HINWEIS: Berechnen Sie ihre Fourierkoeffizienten.

(c) Sei nun $f(t) = \cos t$. Berechnen Sie die Amplitude der periodischen Lösung. Wann ist sie am größten?

LÖSUNG:

(a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 2\kappa + \omega_0^2$ sind

$$\lambda_{1,2} = -\kappa \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} = -\kappa \pm i\omega$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$. Somit ist $(e^{-\kappa t}\cos\omega t, e^{-\kappa t}\sin\omega t)$ eine Basis des Lösungsraums. Wegen $x(t) \to 0$ für $t \to +\infty$ gibt es außer $x(t) = 0$ keine weiteren periodischen Lösungen.

(b) Ist $x(t)$ eine 2π-periodische Lösung von (*), so ist sie zweimal stetig differenzierbar. Die Fourierreihen von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ existieren also und konvergieren gleichmäßig. Für die Fourierkoeffizienten von $\ddot{x}(t)$ gilt einerseits (wegen $\widehat{\dot{x}}_n = in\hat{x}_n$) $\widehat{\ddot{x}}_n = -n^2\hat{x}_n$ und andererseits wegen (*)

$$\widehat{\ddot{x}}_n = -(\omega_0^2 + 2in\kappa)\hat{x}_n + \hat{f}_n,$$

zusammengesetzt also $\hat{x}_n = \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\kappa n - n^2}\hat{f}_n$. Es ist $x(t) = Sx(t)$ und $\dot{x}(t) = S\dot{x}(t)$, da beide Funktionen stetig differenzierbar sind (Vorl., Kap. Fourierreihen, Satz (13)). Außerdem ist $S\ddot{x}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\ddot{x}}_n e^{int}$. Die Reihe konvergiert normal, da

$$\widehat{\ddot{x}}_n = \frac{-n^2}{\omega_0^2 + 2i\kappa n - n^2} \sim \hat{f}_n, \quad \text{für } n \to \pm\infty$$

(es gibt also ein $C > 1$ mit $|\widehat{\ddot{x}}_n| < C|\hat{f}_n|$ für $|n|$ groß genug). Also ist auch $\ddot{x} = S\ddot{x}$ (Vorl., Kap. Fourierreihen, Satz (14)).
Umgekehrt ist damit gezeigt, dass in der Tat $x(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\kappa n - n^2}\hat{f}_n e^{int}$ eine zweimal stetige Funktion definiert, die (*) erfüllt.

(c) $\hat{f}_{\pm 1} = \frac{1}{2}$, alle anderen Fourierkoeffizienten sind 0. Somit ist

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_0^2 + 2i\kappa - 1}e^{it} + \frac{1}{\omega_0^2 - 2i\kappa - 1}e^{-it}\right) \\
&= \frac{(\omega_0^2 - 1 - 2i\kappa)e^{it} + (\omega_0^2 - 1 + 2i\kappa)e^{-it}}{2((\omega_0^2 - 1)^2 + 4\kappa^2)} \\
&= \frac{\omega_0^2 - 1}{(\omega_0^2 - 1)^2 + 4\kappa^2}\cos t + \frac{2\kappa}{(\omega_0^2 - 1)^2 + 4\kappa^2}\sin t \\
&= A\cos(t - t_0).
\end{aligned}$$

wegen $x(t) = \mathrm{Re}\big(\frac{1}{\omega_0^2 - 1 + 2i\kappa}e^{it}\big) = \mathrm{Re}\big(Ae^{-it_0}e^{it}\big)$ ergibt sich $A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-1)^2 + 4\kappa^2}}$ und $t_0 = \arg(\omega_0^2 - 1 + 2i\kappa)$. Offenbar ist A maximal, wenn $\omega_0 = 1$. Die Resonanz ist also maximal, wenn die Eigenfrequenz ω_0 des *ungedämpften* Systems mit der Frequenz des Antriebs übereinstimmt.

Hausaufgaben

38. Beispiele linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben ist die Differentialgleichung $27y^{(5)} - 18y^{(3)} - 44y'' + 56y' - 16y = 0$

(a) Geben Sie eine reelle Basis des Lösungsraums an. HINWEIS: Das charakteristische Polynom hat die Nullstelle $-1 + i$ und die dreifache Nullstelle $\frac{2}{3}$. Es ist nichts zu rechnen.

(b) Man gebe alle auf $\mathbb{R}^+$ beschränkten Lösungen an und schreibe sie als Produkt einer monoton fallenden und einer periodischen Funktion.

LÖSUNG:

(a) Das charakteristische Polynom ist $27\lambda^5 - 18\lambda^3 - 44\lambda^2 + 56\lambda - 16$. Als reelles Polynom treten komplexe Nullstellen immer in konjugierten Paaren auf. Also sind $-1+i$, $-1-i$, dreimal $\frac{2}{3}$ seine fünf Nullstellen. Eine Basis des Lösungsraums ist also nach Aufgabe 35

$$e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t}, e^{\frac{2}{3}t}, te^{\frac{2}{3}t}, t^2e^{\frac{2}{3}t}.$$

Eine reelle Basis ist also

$$e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{\frac{2}{3}t}, te^{\frac{2}{3}t}, t^2e^{\frac{2}{3}t}.$$

(b) Offenbar ist jede Linearkombination der ersten beiden Lösungen (Nullstellen mit nichtpositivem Realteil) beschränkt für $t > 0$. Diese kann man z.B. schreiben als $Ae^{-t}\cos(t - t_0)$, $A \geq 0$, $t_0 \in [0, 2\pi[$.

39. Weitere Eigenschaften der Operatornorm

Sei $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Die Operatornorm ist definiert als $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Bx\|$. Zeigen Sie:

(a) $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$, das Supremum wird angenommen.

(b) $\|B\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$.

(c) $\|B\| = \inf\{\beta \in \mathbb{R}_0^+ : x \in \overline{U_1(0)} \Rightarrow Bx \in \overline{U_\beta(0)}\}$.

LÖSUNG:

Elegenteste Lösung für (a) und (b) (Kinzner):

$$\|B\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| \overset{\|B\frac{x}{\|x\|}\|=\frac{\|Bx\|}{\|x\|}}{\geq} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| = \|B\|.$$

Das Supremum in (a) wird angenomme, da $x \mapsto \|Bx\|$ stetig und $\partial U_1(0)$ kompakt ist.

Umständlichere Alternative:

(a) $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| \geq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$ ist offensichtlich.

Annahme: Es gibt ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\| < 1$ und $\|Bx\| > \sup\limits_{\|x'\|=1} \|Bx'\|$. Dann ist $x \neq 0$ und für $y = \frac{1}{\|x\|}x$ ist $\|y\| = 1$, aber

$$\|By\| = \frac{1}{\|x\|}\|Bx\| > \|Bx\| > \sup_{\|x'\|=1} \|Bx'\|.$$

Widerspruch. Also gilt auch $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$.

$\{x \in \mathbb{K}^n : \|x\| = 1\}$ ist kompakt, da beschränkt und abgeschlossen. Die Funktion $x \mapsto \|Bx\|$ ist stetig darauf, somit wird ihr Supremum angenommen. Es gibt also ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\| = 1$, für das $\|Bx\| = \|B\|\|x\|$ gilt.

(b) $\lambda \in \{\|Bx\| : \|x\| = 1\} \iff$ Es gibt ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\| = 1$ und $\|Bx\| = \lambda$ $\left\{\begin{matrix} \overset{y=x}{\Longrightarrow} \\ \underset{x=\frac{y}{\|y\|}}{\Longleftarrow} \end{matrix}\right\}$ es gibt ein $y \neq 0$ mit $\lambda = \frac{\|By\|}{\|y\|} \iff \lambda \in \left\{\frac{\|By\|}{\|y\|} : y \neq 0\right\}$

(c) "$\leq$": Sei $\beta > 0$, so dass aus $\|x\| \leq 1$ schon $\|Bx\| \leq \beta$ folgt. Dann ist also auch $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| \leq \beta$.

"$\geq$": Sei $x \in \overline{U_1(0)}$. Also ist $\|Bx\| \leq \|B\|$, d.h. $Bx \in \overline{U_{\|B\|}(0)}$. Das Infimum wird also angenommen, durch $\|B\|$.

40. Invertieren von Matrizen mit der geometrischen Reihe

Sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|B\| < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B^n$ absolut konvergent ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(E - B)$ invertierbar ist mit $(E-B)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B^n$.

LÖSUNG:

(a) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B^n$ ist absolut konvergent, wegen

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} B^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|B^k\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|B\|^k \leq \frac{1}{1-\|B\|} < \infty,$$

da $\|B\| < 1$. Somit ist $C := \sum\limits_{n=0}^{\infty} B^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(b) Die geometrische Summenformel gilt auch hier:

$$\begin{aligned}(E-B)\sum_{k=0}^{n} B^k &= E + B + B^2 + \cdots + B^n \\ &\qquad -B - B^2 - \cdots - B^n - B^{n+1} = E - B^{n+1}\end{aligned}$$

Wegen $\|B\| < 1$ gilt $\|B^{n+1}\| \leq \|B\|^{n+1} \to 0$, also $B^n \to 0$. Somit ist

$$(E-B)C = (E-B)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} B^k = \lim_{n\to\infty}(E-B)\sum_{k=0}^{n} B^k = E - \lim_{n\to\infty} B^{n+1} = E$$

wegen der Stetigkeit des Matrixprodukts. Für endlichdimensionale Matrizen folgt daraus, dass $(E-B)$ invertierbar ist mit $(E-B)^{-1} = C$.
Alternativ zeigt man analog $C(E-B) = E$ woraus direkt $(E-B)^{-1} = C$ folgt.

41. Gekoppelte Pendel

Schreiben Sie das System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= -q_1 - \kappa\,(q_1 - q_2)\\ \ddot{q}_2 &= -q_2 - \kappa\,(q_2 - q_1)\end{aligned}$$

mit $q_1(t), q_2(t) \in \mathbb{R}$ und der Federkonstanten $\kappa \geq 0$ in der Form $\ddot{q} = -Cq$ mit $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Wie lautet $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

(b) Bestimmen Sie $\sqrt{C}$ und $\cos(t\sqrt{C})$. Hinweis: C ist symmetrisch, siehe Aufgabe 36.

(c) Zeigen Sie, dass $q(t) = \cos(t\sqrt{C})a + \sin(t\sqrt{C})b$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Systems ist.

(d) Eine Lösung $q(t)$ von $\ddot{q} = -Cq$ heißt Eigenschwingung des Systems, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ der Vektor $\binom{q_1(t)}{q_2(t)}$ ein Eigenvektor von C ist. Geben Sie zu jedem Eigenwert von C eine Eigenschwingung an.

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(1+\kappa)q_1 + \kappa q_2\\ \kappa q_1 - (1+\kappa)q_2\end{pmatrix}$. Somit ist $C = \begin{pmatrix}1+\kappa & -\kappa\\ -\kappa & 1+\kappa\end{pmatrix}$.

(b) Die Matrix C aus Aufgabenteil (a) ist reell-symmetrisch, d.h. $C^T = C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Es gibt also eine ONB aus Eigenvektoren, (u_1, u_2), in der die darstellende Matrix von C diagonal ist, $C = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_{1,2}$. Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dann $f(C) = f(\lambda_1)u_1u_1^T + f(\lambda_2)u_2u_2^T$ wohldefiniert. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von C

$$\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}C)\lambda + \det C = \lambda^2 - 2(1+\kappa)\lambda + 1 + 2\kappa$$

lauten $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + 2\kappa$. Wir bestimmen eine Orthonormalbasis (u_1, u_2) von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von C,

$$(C - \lambda_1\mathbb{1})u_1 = \begin{pmatrix}\kappa & -\kappa\\ -\kappa & \kappa\end{pmatrix} u_1 = 0, \quad \text{also z.Bsp.} \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

und

$$(C - \lambda_2\mathbb{1})u_2 = \begin{pmatrix}-\kappa & -\kappa\\ -\kappa & -\kappa\end{pmatrix} u_2 = 0, \quad \text{also z.Bsp.} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Die Projektoren auf die beiden Eigenräume sind

$$u_1u_1^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad u_2u_2^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Gemäß Hinweis haben wir

$$\begin{aligned}\sqrt{C} &= \sqrt{\lambda_1}u_1u_1^T + \sqrt{\lambda_2}u_2u_2^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\sqrt{1+2\kappa} & 1-\sqrt{1+2\kappa}\\ 1-\sqrt{1+2\kappa} & 1+\sqrt{1+2\kappa}\end{pmatrix},\\ \cos(\sqrt{C}t) &= \cos\left(\sqrt{\lambda_1}t\right)u_1u_1^T + \cos\left(\sqrt{\lambda_2}t\right)u_2u_2^T\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos(t) + \cos(\sqrt{1+2\kappa}t) & \cos(t) - \cos(\sqrt{1+2\kappa}t)\\ \cos(t) - \cos(\sqrt{1+2\kappa}t) & \cos(t) + \cos(\sqrt{1+2\kappa}t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Wir leiten zunächst für $b = 0$ gemäß Aufgabe 36 ab:

$$\ddot{q}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\cos(t\sqrt{C})a = -\frac{d}{dt}\sqrt{C}\sin(t\sqrt{C})a = -C\cos(t\sqrt{C})a = -Cq(t).$$

Analog für $a = 0$.

(d) Für Eigenschwingungen des Systems zum Eigenwert 1 wählt man in (c) a und b als zugehörige Eigenvektoren, z.B. $a = \binom{1}{1}$, $b = 0$. Dann ist $q_1(t) = q_2(t) = \cos(t)$ (gleichphasige Schwingung). Zum Eigenwert $\sqrt{1+2\kappa}$ wählt man z.B. $a = \binom{1}{-1}$, $b = 0$. Dann ist $q_1(t) = -q_2(t) = \cos(\sqrt{1+2\kappa}\,t)$ (gegenphasige Schwingung).