TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik (Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 5
(19.05.2010)

Die Zentralübung entfällt am 24.5.2010 wegen Pfingsten

Hausaufgaben

31. Offene Überdeckungen

(a) Geben Sie eine Folge in $]0,1]$ an, die keine in $]0,1]$ konvergente Teilfolge besitzt.

(b) Geben Sie eine offene Überdeckung von $]0,1]$ an, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

(c) Geben Sie eine Folge in $\overline{U_1(0)} \subset B(\mathbb{N})$ an, die keine in $\overline{U_1(0)} \subset B(\mathbb{N})$ konvergente Teilfolge besitzt.

(d) Geben Sie eine offene Überdeckung von $\overline{U_1(0)} \subset B(\mathbb{N})$ an, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

Die Antworten sind zu begründen.

Lösung:

(a) $(\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0, also konvergiert auch jede Teilfolge gegen $0 \notin]0,1]$.

(b) $U_n :=]\frac{1}{n}, 2[$, $n \in \mathbb{N}$, überdeckt offenbar $]0,1]$, denn für $x \in]0,1]$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$, also $x \in]\frac{1}{n}, 2[$.
Gäbe es eine endliche Teilüberdeckung $(U_{n_i})_{i\in\{1,\dots,k\}}$, dann wäre $x := \frac{1}{\max\limits_i n_i + 1} \in]0,1]$ aber $x \notin \bigcup\limits_i U_{n_i}$, Widerspruch.

(c) $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $e_n^{(k)} := \delta_{k,n}$ ist offenbar eine Folge in $\overline{U_1(0)}$. Sie ist beschränkt, besitzt aber dennoch keine konvergente Teilfolge, da für $n \neq m$ immer $\|e_k - e_l\|_s = 1$ gilt.

(d) Wähle $U_k := \{a \in B(\mathbb{N}) : a_k \in]-2,0[\cup]0,2[\}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $U_0 = U_{\frac{1}{2}}(0)$. Diese überdecken $\overline{U_1(0)}$, denn zu $a \in \overline{U_1(0)}$ gibt es entweder ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$, also $a \in U_k$, oder $a = 0$, dann ist $a \in U_0$.
Wäre $(U_{k_i})_{i\in\{1,\dots,n\}}$ endliche Teilüberdeckung von $\overline{U_1(0)}$, dann ist mit $K := \max\limits_i k_i + 1$ der Vektor $e^{(K)}K$, der nur in U_K enthalten ist, nicht in $\bigcup\limits_i U_{k_i}$ enthalten. Widerspruch.

32. Abgeschlossene Einheitskugel, Beispiel einer kompakten Menge in $B(\mathbb{N})$

(a) Sei D eine beliebige Menge. Wann genau ist $\overline{U_1(0)} \subset (B(D), \|\cdot\|_s)$ kompakt?

(b) Die Menge $K = \{x \in B(\mathbb{N}) : x_n \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}\}$ ist kompakt in $(B(\mathbb{N}), \|\cdot\|_s)$.
Hinweis: Zeigen Sie Abgeschlossenheit und Totalbeschränktheit.

Lösung:

(a) Die abgeschlossene Einheitskugel ist genau dann kompakt, wenn D endlich ist.
Besitzt D n Elemente, so kann man $B(D, \mathbb{K})$ mit dem $\mathbb{K}^n$ identifizieren. Die Einheitskugel $\overline{U_1(0)}$ ist beschränkt und abgeschlossen, nach Korollar (8) also kompakt. so gibt es eine Bijektion $\phi : \{1, \ldots, n\} \to D$ und damit einen isometrischen Isomorphismus von $(B(D, \mathbb{K}), \|\cdot\|_s)$ in den $(\mathbb{K}^n, \|\cdots\|_s)$ vermöge

$$B(D, \mathbb{K}) \ni x = (x_d)_{d \in D} \mapsto (x_{\phi(1)}, \ldots, x_{\phi(n)}) \in \mathbb{K}^n.$$

Somit ist $\overline{U_1(0)}$ in $(B(D, \mathbb{K})$ kompakt, da $\overline{U_1(0)}$ in $\mathbb{K}^n$ kompakt ist.
Ist D unendlich, dann gibt es eine injektive Funktion $i : \mathbb{N} \to D$. Die Folge $(x^{(k)})$ in $\overline{U_1(0)} \subset B(D, \mathbb{K})$, mit $x_d^{(k)} = 1$ falls $d = i(k)$ und $= 0$ sonst, besitzt keine konvergente Teilfolge, da für $k \neq l$ immer $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|_s = 1$ gilt.
Somit ist $\overline{U_1(0)}$ zwar beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt in $B(D, \mathbb{K})$.

(b) K ist abgeschlossen, denn Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in K die gegen $a \in B(\mathbb{N})$ konvergiert, so ist $\|x^{(k)} - a\|_s$ Nullfolge, also auch $|x_n^{(k)} - a_n| \leq \|x^{(k)} - a\|_s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Nullfolge. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $x_n^{(k)} \to a_n \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Mit anderen Worten $a \in K$.
K ist auch totalbeschränkt. Denn sei $\epsilon > 0$. Sei $N > \frac{1}{\epsilon}$. Sei nun $K_\epsilon = (\epsilon\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \cap K$. $a \in K_\epsilon$ bedeutet $a_n \in \epsilon\mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ für n in $\mathbb{N}$. Die offenen Mengen $(U_\epsilon(a))_{a \in \mathbb{K}_\epsilon}$ überdecken K, denn zu $x \in K$ liegt $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \epsilon[\frac{x_n}{\epsilon}] \in \epsilon\mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ in K_ϵ.
Hierbei bedeutet $[x] = \max\{n : n \leq x\}$ für $x \geq 0$ und $[x] = -[-x]$ für $x < 0$.
K_ϵ enthält höchstens $[2N + 1]^{N-1}$ Elemente, da $|\epsilon\mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]| \leq 2N + 1$ für $n = 1, \cdots, N - 1$ und $|\epsilon\mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]| = 1$ für $n \geq N$.
Somit ist K totalbeschränkt und damit kompakt.

33. Abstand von Mengen

Sei (X, d) metrischer Raum. $A, B \subset X$, $x \in X$. Man definiert den Abstand von A zu B,

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

und $d_A(x) := \operatorname{dist}(\{x\}, A)$.

(a) Ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $\operatorname{dist}(A, B) = 0$. Geben Sie Beispiele mit disjunkten A und B, für die $\operatorname{dist}(A, B) = 0$ gilt, wobei A und B (i) offen, (ii) abgeschlossen gewählt sind.

(b) Beweisen Sie, dass $X \ni x \mapsto d_A(x)$ gleichmäßig stetig ist.
Hinweis: Warum ist $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ für $x, y \in X$?

(c) Zeigen Sie, dass aus A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$ schon $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ folgt.

Lösung:

(a) $A = \mathbb{R}^-$, $B = \mathbb{R}^+$, sind beide offen in $\mathbb{R}$ und $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.
Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ der Graph von $\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x}$ und $B = \mathbb{R} \times \{0\}$, beide sind abgeschlossen. Offenbar ist $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.
Es geht auch in $\mathbb{R}$: $A = \mathbb{N}$ und $B = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ sind beides abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wieder gilt $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

(b) Seien $x, y \in X$. Für alle $a \in A$ gilt

$$d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

Also auch für dass Infimum über alle $a \in A$,

$$d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d_A(y).$$

Das ist $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$. Durch Vertauschen von x und y erhält man auch $d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$ und damit

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \epsilon$. Dann folgt für alle $x, y \in X$ aus $d(x, y) < \delta$ sofort $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y) < \delta = \epsilon$. Also ist d_A gleichmäßig stetig.

(c) $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d_A(y) : y \in B\} = \inf d_A(B)$. Da B kompakt und d_A stetig ist ist auch $d_A(B) \subset \mathbb{R}_0^+$ kompakt.
Annahme: $\inf d_A(B) = 0$. Dann ist $0 \in d_A(B)$, es gäbe also ein $y \in B$ mit $d_A(y) = 0$ und damit eine Folge (x_n) in A mit $d(x_n, y) \to 0$, bzw., $x_n \to y$. Da A abgeschlossen ist, wäre $y \in A$ im Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$.
Alternative (ohne Widerspruchsbeweis): $d(A, B) = \inf\limits_{y \in B} d_A(y)$. Da d_A stetig und B kompakt, wird das Infimum in B angenommen, z.B. in $z \in B$. Da $z \notin A$ abgeschlossen, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $A \cap U_\epsilon(z) = \emptyset$. Daraus folgt

$$d(A, B) = d_A(z) \geq \epsilon > 0.$$

34. Schachtelung kompakter Mengen

Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge nichtleerer kompakter Mengen im metrischen Raum (M,d), also $K_n \supset K_{n+1} \neq \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$. Man zeige $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ und gebe ein Beispiel dafür, dass Abgeschlossenheit als Vorraussetzung nicht ausreicht.

LÖSUNG:

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n \in K_n$. Die Folge (x_n) ist in K_1 enthalten, besitzt also eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in M$ für $k \to \infty$. Behauptung: $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein K, so dass $n_K \geq n$, somit liegen alle $x_{n_k} \in K_n$ falls $k \geq K$. Da K_n abgeschlossen ist gilt $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K_n$. Da n beliebig war, folgt

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n.$$

Wählt man $G_n = [n, \infty[$, so gilt $G_n \supset G_{n+1} \neq \emptyset$, die G_n sind aber nur abgeschlossen und nicht kompakt. Offenbar ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \emptyset$.