Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

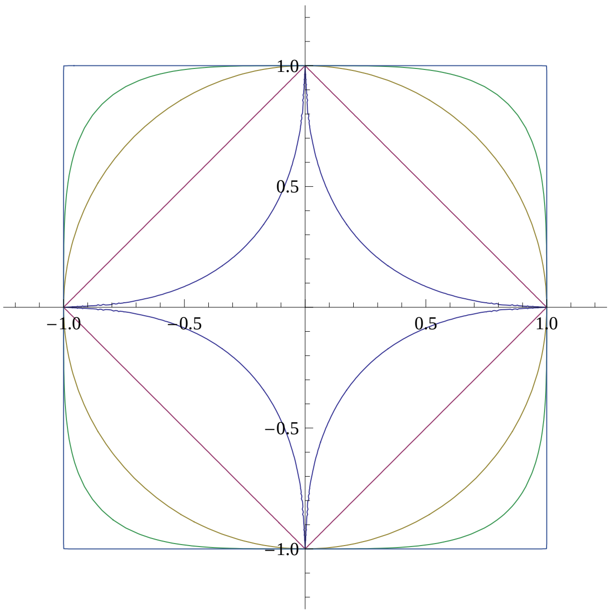
Sommersemester 2010
Lösungsblatt 3
(05.05.2010)

Zentralübung

15. Einheitskugel in der p-Norm

Skizzieren Sie $U_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der von $\|\cdot\|_p$ erzeugten Metrik für $p = 1, 2, 4, \infty$. Wie lautet die analoge Menge für $p = \frac{1}{2}$? Warum definiert $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ keine Norm?

Lösung:



Von innen nach außen: $p = \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \infty$.

$U_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p < 1\}$.
Setzt man $f_\pm(x) = \sqrt[p]{1 - |x|^p}$ für $x \in [-1, 1]$, so ist

$$U_1(0) = \{(x, y) : x \in]-1, 1[,\ y \in]f_-(x), f_+(x)[\},$$

wird also durch die Graphen von $f_\pm$ begrenzt.

Für $p = \frac{1}{2}$ ist die Dreicksungleichung verletzt: $\|(1, 0)\|_{\frac{1}{2}} = \|(0, 1)\|_{\frac{1}{2}} = 1$, aber

$$\|(1, 1)\|_{\frac{1}{2}} = (\sqrt{1} + \sqrt{1})^2 = 4 > 1 + 1.$$

16. Produktmetrik

Seien (X, d^X), (Y, d^Y) metrische Räume, $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$,

$$d((x, y), (x', y')) := \max\{d^X(x, x'), d^Y(y, y')\}.$$

Zeigen Sie, dass $(X \times Y, d)$ ein metrischer Raum ist.

Lösung:

(i) $d \geq 0$, $d((x, y), (x, y)) = 0$ ist offensichtlich. Aus $d((x, y), (x', y')) = 0$ folgt $d^X(x, x') = 0$ und $d^Y(y, y') = 0$ mithin $x = x'$ und $y = y'$, also $(x, y) = (x', y')$.

(ii) Die Symmetrie ist offensichtlich, wegen der Symmetrie von d^X, d^Y.

(iii) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
d((x, y), (x'', y'')) &= \max\{d^X(x, x''), d^Y(y, y'')\} \\
&\leq \max\{d^X(x, x') + d^X(x', x''), d^Y(y, y') + d^Y(y', y'')\} \\
&\leq \max\{\max\{d^X(x, x'), d^Y(y, y')\} + d^X(x', x''), \\
&\qquad \max\{d^X(x, x'), d^Y(y, y')\} + d^Y(y', y'')\} \\
&\leq \max\{d^X(x, x'), d^Y(y, y')\} + \max\{d^X(x', x''), d^Y(y', y'')\} \\
&= d((x, y), (x', y')) + d((x', y'), (x'', y''))
\end{aligned}$$

17. Abgeschlossene Kugeln und Sphären

Sei (X,d) metrischer Raum, $a \in X$, $r > 0$.

(a) Die "abgeschlossene Kugel" $\tilde{U}_r(a)$ ist abgeschlossen.

(b) Die Sphäre $S = \{x \in X : d(x,a) = r\}$ ist abgeschlossen.

(c) Ist X ein normierter Vektorraum mit induzierter Metrik, so gilt $S = \partial U_r(a) = \partial \tilde{U}_r(a)$.

(d) Geben Sie Beispiele für metrische Räume, für die $\partial U_r(a) \subsetneq S$, bzw., $\partial \tilde{U}_r(a) \subsetneq S$.
HINWEIS: Betrachten Sie z.B. Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

LÖSUNG:

(a) Sei $x \in X \setminus \tilde{U}_r(a)$. Dann ist $d(x,a) > r$.
Zu zeigen ist, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $U_\epsilon(x) \subset X \setminus \tilde{U}_r(a)$.
Für $\epsilon = d(x,a) - r > 0$ folgt aus $d(x,y) < \epsilon$, dass $d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a)$, mithin $d(y,a) \ge d(x,a) - d(x,y) \ge d(x,a) - \epsilon > r$.

(b) $S = X \setminus (\underbrace{\{x \in X : d(x,a) > r\}}_{\text{offen wegen (a)}} \cup \underbrace{\{x \in X : d(x,a) < r\}}_{\text{offen laut Vorl.}})$, also abgeschlossen.

(c) $S = \partial U_r(a)$, denn
"$\subset$": Sei $x \in S$, also $\|x - a\| = r$.
Zu $\epsilon > 0$ ist $x \in U_\epsilon(x) \cap (X \setminus U_r(a))$ und $(1 - \frac{\epsilon}{2r})(x-a) + a \in U_\epsilon(x) \cap U_r(a)$. Also ist $x \in \partial U_r(a)$.
"$\supset$": Sei $x \in \partial U_r(a)$.
Annahme: $\|x - a\| > r$. Dann folgt, dass x kein Berührpunkt von $U_r(a)$ ist, also kein Randpunkt, da $U_\epsilon(x) \cap U_r(a) = \emptyset$ mit $\epsilon = \|x - a\| - r$.
Annahme: $\|x - a\| < r$. Dann folgt, dass x kein Berührpunkt von $X \setminus U_r(a)$ ist, also kein Randpunkt.
Bleibt nur $\|x - a\| = r$, bzw. $x \in S$.

$S = \tilde{U}_r(a)$ geht ganz analog.

(d) Im metrischen Raum $\mathbb{R}^2 \setminus U_1(0) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ mit induzierter euklidischer Metrik ist $\partial U_1(0) = \emptyset$, aber S ist nichtleer.
Im metrischen Raum $\tilde{U}_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ mit induzierter euklidischer Metrik ist $\partial \tilde{U}_1(0) = \emptyset$, aber S ist nichtleer.

18. Definition der Cantormenge

Sei $C_0 := [0,1]$, $C_{n+1} = (\frac{1}{3}C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$, $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$. Man zeige:

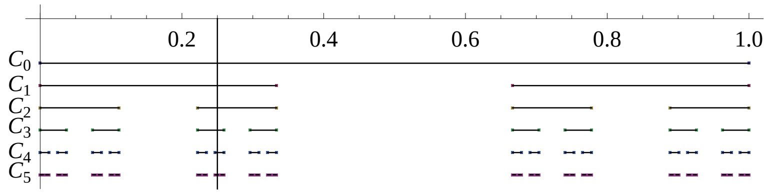
(a) $C_{n+1} \subset C_n$,

(b) C ist abgeschlossen, nichtleer und selbstähnlich, $C = (\frac{1}{3}C) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C)$.

(c) C_n besteht aus 2^n disjunkten Intervallen, jeweils der Länge 3^{-n},
$C_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{a_{n+1}}{3^n} : a \in \{0,1\}^n \times [0,1] \right\}$

(d) $C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} : a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \right\}$ und besitzt überabzählbar viele Elemente.

Lösung:



Vorbemerkung: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$, $A, B \subset \mathbb{R}$, so gilt für $\alpha + \beta A = \{\alpha + \beta x : x \in A\}$
$A \subset B \Leftrightarrow \alpha+\beta A \subset \alpha+\beta B$, $\overline{\alpha + \beta A} = \alpha+\beta\overline{A}$, $\quad \overset{\circ}{\alpha + \beta A} = \alpha+\beta\mathring{A}$, $\quad \partial(\alpha + \beta A) = \alpha+\beta\partial A$

(a) "$n = 0$": $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \subset [0,1] = C_0$.
"$n \to n+1$": $C_{n+1} = (\frac{1}{3}C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n) \overset{\text{I.V.}}{\subset} (\frac{1}{3}C_{n-1}) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}) = C_n$.

(b) C_0 ist abgeschlossen, mit C_n ist auch C_{n+1} abgeschlossen, somit auch C als Vereinigung abgeschlossener Mengen.
$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \in C_n$ offenbar für $n \in \mathbb{N}_0$, also z.B. $0 \in C$.
Beh.: $C = (\frac{1}{3}C) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C)$. $\qquad x \in C \iff x \in C_n$ f.a. $n \in \mathbb{N} \iff$ entweder $x < \frac{1}{2}$, dann ist $x \in \frac{1}{3}C_{n-1}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$, oder $x \geq \frac{1}{2}$, dann ist $x \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}$ f.a. $n \in \mathbb{N}$
$\iff x \in \frac{1}{3}C$ oder $x \in \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C \iff x \in (\frac{1}{3}C) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C)$.

(c) Die erste Behauptung ist aus der Abbildung inituitiv klar. Formal zeigen wir $C_n = D_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit
$$D_n := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{a_{n+1}}{3^n} : a \in \{0,1\}^n \times [0,1] \right\}.$$
Dies gilt, da $D_0 = [0,1]$ und $D_{n+1} = (\frac{1}{3}D_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}D_n)$, genau wie für die C_n:
$x \in D_{n+1} \iff$ es gibt $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \{0,1\}$, $a_{n+2} \in [0,1]$, s.d. $x = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{a_{n+2}}{3^{n+1}}$
$x \in (\frac{1}{3}D_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}D_n) \iff$ es gibt $b_0 \in \{0,1\}$, $b_1, \ldots, b_n \in \{0,1\}$, $b_{n+1} \in [0,1]$, s.d. $x = \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{2b_k}{3^k} + \frac{b_{n+1}}{3^n}$. Beide Aussagen sind also äquivalent, wie man an der Zuordnung $a_1 \leftrightarrow b_0, \ldots, a_{n+2} \leftrightarrow b_{n+1}$ erkennt.

(d) Die Abbildung $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \ni (a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} \in C$ ist sogar bijektiv. Da $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist, ist es auch C.
Beweis: Für $(a_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k}}_{\in[0,3^{-n}]} \in C_n$, und damit in C. Gilt $(a_n) \neq (b_n)$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_k = b_k$, $k = 1, \ldots, n-1, a_n \neq b_n$.
Somit ist $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b_k}{3^k} \right| \geq \frac{2|a_n - b_n|}{3^n} - \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2(a_k - b_k)}{3^k} \right| \geq \frac{2}{3^n} - \frac{1}{3^n} > 0$, also ist die Abbildung injektiv.
Surjektiv ist sie, da es zu $x \in C$ ein $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ gibt, mit $x \in \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + [0, 3^{-n}]$. Somit ist $\left| x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} \right| \leq \left| x - \sum_{k=0}^{n} \frac{2a_k}{3^k} \right| + \frac{1}{3^n} \leq \frac{2}{3^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, somit $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k}$.

Hausaufgaben

19. Vereinigung und Schnitt abgeschlossener Mengen

Sei (X, d) metrischer Raum.

(a) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(b) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(c) Es gibt abzählbar viele offene Intervalle in $\mathbb{R}$, deren Durchschnitt nicht offen ist.

(d) Es gibt eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nicht abgeschlossen ist.

(e) Es gibt abzählbar viele abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

Lösung:

(a) Seien $A_1, \cdots, A_n \subset X$ abgeschlossen. Dann sind alle $X \setminus A_i$ offen, also ist auch $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$ offen. Daher ist

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) \right)$$

abgeschlossen.

(b) Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen. Dann ist $(X \setminus A_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen, und somit ist $\bigcup\limits_{i \in I} (X \setminus A_i)$ offen. Daher ist

$$\bigcap_{i \in I} A_i = X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) \right)$$

abgeschlossen.

(c) $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}]0, 1+\frac{1}{n}[=]0, 1]$.

(d) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}$ ist nicht abgeschlossen, da jede ϵ-Umgebung der 0 nichtleeren Schnitt mit der Menge hat.

(e) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [0, 1-\frac{1}{n}] = [0, 1[$.

20. Ränder

Man bestimme, mit Begründung, Inneres, Rand und Abschluss für

(a) $]a,b] \subset \mathbb{R}$, (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, (c) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. (d) $]0,\sqrt{2}[\, \cap\, \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$,

mit der jeweiligen Standardmetrik auf der Obermenge.

LÖSUNG:

(a) Für $\epsilon > 0$ klein genug ist $a \in U_\epsilon(a) \cap \mathbb{R}\setminus]a,b]$ und $a + \frac{\epsilon}{2} \in U_\epsilon(a) \cap]a,b]$, analog für b, also ist $a, b \in \partial]a,b]$. $]a,b[$ ist offenbar die Menge der inneren Punkte von $]a,b]$ und $\mathbb{R}\setminus[a,b]$ die Menge der äußeren Punkte, also $\overset{\circ}{]a,b]} =]a,b[$, $\partial]a,b] = \{a,b\}$, $\overline{]a,b]} = [a,b]$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Bekanntlich gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $y \in \mathbb{Q}$ und ein $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|x - y| < \epsilon$ und $|x - z| < \epsilon$, also ist x ein Randpunkt von $\mathbb{Q}$, d.h $\overline{\mathbb{Q}} = \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

(c) Zu $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ ist $x \in \mathbb{R}$ und $x + i\frac{\epsilon}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, also ist $\overline{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{R}} = \emptyset$.

(d) $]0,\sqrt{2}[$ ist offen in $\mathbb{R}$, also ist $A =]0,\sqrt{2}[\, \cap\, \mathbb{Q}$ offen in $\mathbb{Q}$, also $\mathring{A} = A$.
$[0,\sqrt{2}]$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, also ist $[0,\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = A \cup \{0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{Q}$, 0 ist Berührpunkt von A, somit $\overline{A} = A \cup \{0\}$, und $\partial A = \{0\}$.

21. Eindeutigkeit des Grenzwerts, Berührpunkte

Sei (X, d) metrischer Raum.

(a) Für (x_n) in X, $a, b \in X$ gilt: aus $x_n \to a$ und $x_n \to b$ folgt $a = b$.

(b) Sei $Y \subset X$. $a \in X$ ist genau dann ein Berührpunkt von Y, wenn es eine Folge (x_n) in Y gibt, mit $x_n \to a$.

LÖSUNG:

(a) $0 \leq d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) \to 0$ für $n \to \infty$. Somit ist $d(a, b) = 0$, d.h., $a = b$.

(b) "$\Rightarrow$": Sei für alle $\epsilon > 0$ die Menge $U_\epsilon(a) \cap Y \neq \emptyset$. Wähle (x_n) in Y, so dass $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a) \cap Y$. Dann ist $0 \leq d(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$, d.h. $d(x_n, a) \to 0$, bzw., $x_n \to a$.
"$\Leftarrow$": Sei (x_n) in Y mit $x_n \to a$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, a) < \epsilon$. Somit ist $x_n \in U_\epsilon(a) \cap Y \neq \emptyset$.

22. Randpunkte der Cantormenge

Sei $C_0 := [0,1]$, $C_{n+1} = (\frac{1}{3}C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$, $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$, $R := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \partial C_n$. Man zeige:

(a) $\partial C_n \subset \partial C_{n+1}$, HINWEIS: $\partial C_{n+1} = (\frac{1}{3}\partial C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\partial C_n)$.

(b) Es ist $\partial C_n = R_n := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{a_{n+1}}{3^n} : a \in \{0,1\}^{n+1} \right\}$.

(c) $R \subset C$ enthält unendlich viele Punkte.

(d) R ist nicht abgeschlossen, $\overline{R} = C$.

LÖSUNG:

(a) $n = 0$: $\partial C_0 = \{0,1\} \subset \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} = \partial C_1$.
Aus Aufgabe ? ist bekannt, dass $\partial C_n \subset C_n \subset [0,1]$ ist.
Sei $\partial C_{n-1} \subset \partial C_n$ gezeigt. Dann ist

$$\partial C_n = (\tfrac{1}{3}\partial C_{n-1}) \cup (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\partial C_{n-1}) \subset (\tfrac{1}{3}\partial C_n) \cup (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\partial C_n) = \partial C_{n+1}.$$

(b) Für $n = 0$ ist $\partial C_0 = \{0,1\} = \{\frac{a_1}{3^0} : a_1 \in \{0,1\}\} = R_0$.
Wir zeigen $R_{n+1} = (\frac{1}{3}R_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}R_n)$:
$x \in (\frac{1}{3}R_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}R_n) \Leftrightarrow 3x \in R_n$ oder $3x - 2 \in R_n$
$\Leftrightarrow$ es gibt $a \in \{0,1\}^{n+1}$, $y = \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{a_{n+1}}{3^n}$, so dass $x = \frac{1}{3}y$ oder $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}y$
$\Leftrightarrow$ es gibt $a \in \{0,1\}^{n+1}$, $a_0 \in \{0,1\}$ mit $x = \frac{2}{3}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^{k+1}} + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$
$\Leftrightarrow$ es gibt $b \in \{0,1\}^{n+2}$ mit $x = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2b_k}{3^k} + \frac{b_{n+2}}{3^{n+1}}$ (nämlich $b_1 = a_0, \dots, b_{n+2} = a_{n+1}$)
$\Leftrightarrow x \in R_{n+1}$.
Somit ist $R_n = \partial C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt.

(c) Sei $x \in R$, es gibt also ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $x \in \partial C_k \subset C_k$ für alle $k \geq n$. Wegen $C_0 \supset \dots \supset C_n$ ist also $x \in C$.
$\#(\partial C_n) = 2^{n+1}$, da $\#(\partial C_0) = 2$ und, weil $\frac{1}{3}\partial C_n$ und $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\partial C_n$ disjunkt sind, $\#(\partial C_{n+1}) = 2 \cdot \#(\partial C_n)$.
Hierbei ist $\#A \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Anzahl der Elemente der Menge A.
Die Vereinigung R enthält also unendlich viele Punkte.

(d) Wählt man die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,0,1,\dots)$, so ist $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k}$ in ∂C_n.
$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} = \frac{2}{9} + \frac{2}{81} + \dots = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$.
Für jedes n ist $\min\{|\frac{1}{4} - x| : x \in R_n\} = \frac{1}{4\cdot 3^n}$, Also $\frac{1}{4} \notin R$.
Aus Aufgabe 18 ist bekannt, dass $x \in C$ gleichbedeutend ist mit $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k}$, $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Die n-te Partialsumme ist in $R_n \subset R$. Die Folge der Partialsummen ist also eine konvergente Folge in R mit Grenzwert in C. Dies zeigt $C \subset \overline{R}$.
Offenbar ist $R \subset C$, denn: Sei $x \in R$. Es gibt also $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in \partial C_k$ für alle $k \geq n$. Somit ist $x \in C_k$ für alle $k \geq n$, und damit $x \in C$.
Da C abgeschlossen und $R \subset C \subset \overline{R}$ folgt $C = \overline{R}$.