PROF. DR. D. CASTRIGIANO
DR. M. PRÄHOFER

**Mathematik 3 für Physik (Analysis 2)**

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 2
(28.04.2010)

## Zentralübung

### 8. Der Dirichlet-Kern ist eine divergente Cosinusreihe

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos kt$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ divergent.

LÖSUNG:

Für die Teilsummen ist $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2}(D_n(t) - 1)$. Es genügt also zu zeigen, das $(D_n(t))$ für festes $t$ divergiert.
Wegen der $2\pi$-Periodizität genügt es, die Divergenz für $t = 2\pi y$, $y \in (0, 1)$ zu zeigen.
Die Folge $a_k = ky - [ky] \in [0, 1[$ ist beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge $a_{k_i} \to a \in [0, 1]$. Ist $a = \frac{1}{4}$ oder $a = \frac{3}{4}$, so gilt $a_{2k_i} \to \frac{1}{2}$. $a_k$ besitzt also einen Häufungswert $a \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$. Wegen der Stetigkeit des Cosinus besitzt also $\cos kt = \cos 2\pi a_k$ den Häufungswert $\cos 2\pi a \neq 0$.

**9. Geometrische Cosinus- und Sinuskoeffizienten**

(a) Berechnen Sie $f_r(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k \cos kt$ und $g_r(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k \sin kt$ für $r \in \,]-1,1[$.
HINWEIS: Man betrachte $f_r(t) + i g_r(t)$.

(b) Bestimmen Sie $f(t)$ und $g(t)$ als punktweisen Limes von $f_r$, $g_r$ für $r \to 1-$.

(c) Bestimmen Sie Stammfunktionen $F$ von $f-1$ und $G$ von $g$ auf $]0,2\pi[$.
HINWEIS: Substitution $x = \sin\frac{t}{2}$.

(d) Man skizziere die auftretenden Funktionen mit Hilfe eines Plot-Programms.

BEMERKUNG: Man kann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k} = -\ln(2\sin\frac{t}{2})$ für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ zeigen.

LÖSUNG:

(a) Beide Reihen werden durch die geometrische Reihe majorisiert und sind daher absolut konvergent. Somit ist

$$\begin{aligned} f_r(t) + i g_r(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ikt} = \frac{1}{1-re^{it}} = \frac{1-re^{-it}}{1-2r\cos t + r^2} \\ &= \frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t+r^2} + i\frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}. \end{aligned}$$

Da $f_r$ und $g_r$ reell sind ergibt der Vergleich von Real- und Imaginärteil das Ergebnis aus der Vorlesung,

$$f_r(t) = \frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t+r^2}, \qquad g_r(t) = \frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}.$$

(b) Für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{r\to 1-} f_r(t) = \lim_{r\to 1-} \frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t+r^2} = \frac{1-\cos t}{2-2\cos t} = \frac{1}{2}, \\ g(t) &= \lim_{r\to 1-} g_r(t) = \lim_{r\to 1-} \frac{r\sin t}{1-2r\cos t+r^2} = \frac{\sin t}{2-2\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Für $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 1-} f_r(t) &= \lim_{r\to 1-} \frac{1-r}{1-2r+r^2} = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{1-r} = \infty, \\ \lim_{r\to 1-} g_r(t) &= 0. \end{aligned}$$

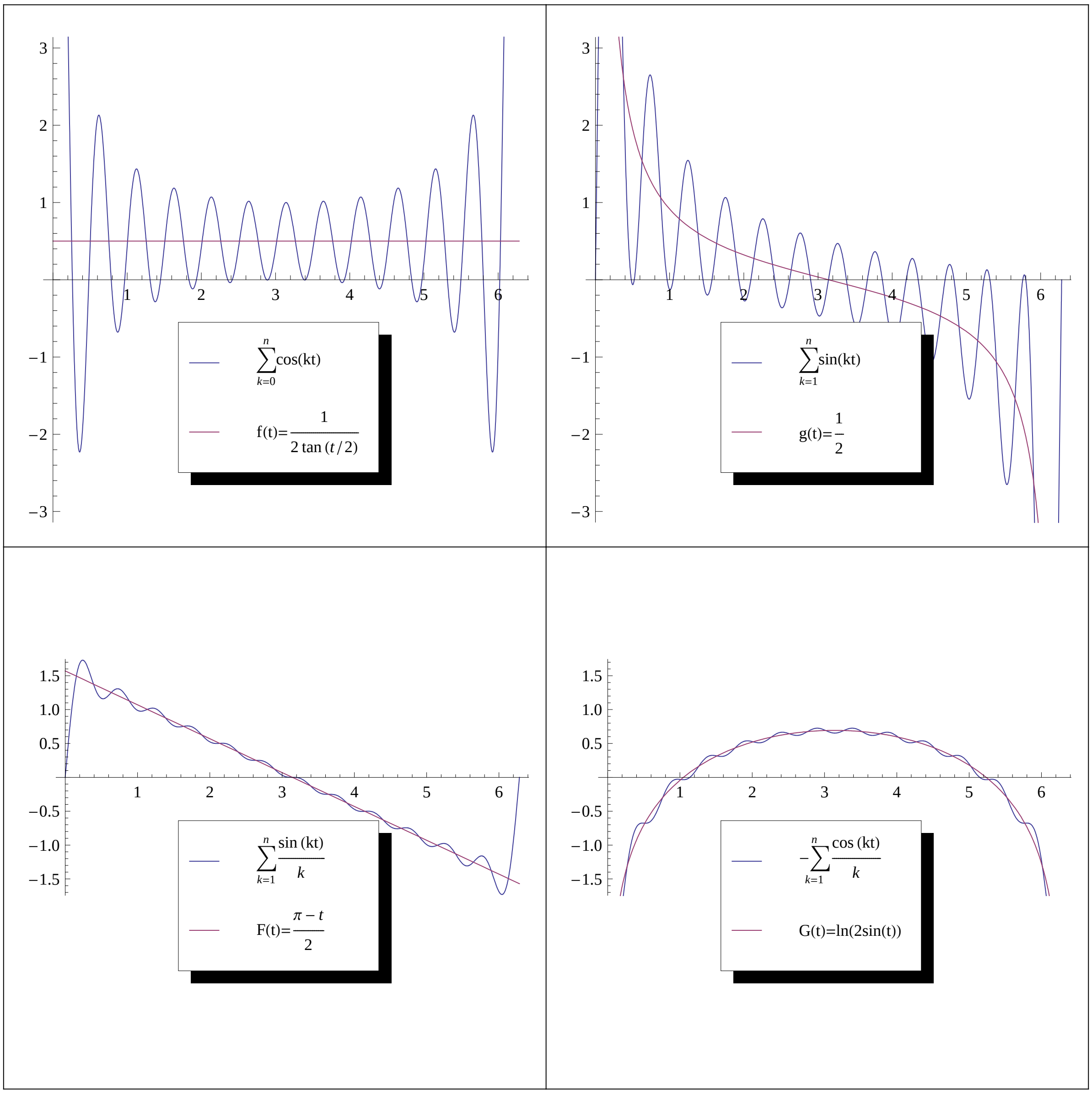
(c) $F(t) = \int\limits_{\pi}^{t} (f(s)-1)ds = \frac{\pi-t}{2}$ für $t \in \,]0,2\pi[$. Bekanntermaßen gilt dort $F(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$.

$$G(t) = c + \int_{\pi}^{t} g(s)ds = c + \int_{\pi}^{t} \frac{\cos\frac{s}{2}}{2\sin\frac{s}{2}} ds = c + \int_{\pi}^{t} \frac{d}{ds}\left(\ln(\sin\tfrac{s}{2})\right) ds = c + \ln(\sin\tfrac{t}{2}).$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k} = -\ln(2\sin\frac{t}{2})$ kann man unter Ausnutzung von $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \pm \cdots = \ln 2$, wie beim Fundamentalbeispiel die Beziehung

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin Nx = \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

aufintegriert, abschätzt und den Grenzübergang $N \to \infty$ durchführt.


$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$
$f(t)=\frac{1}{2\tan(t/2)}$
$\sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$
$g(t)=\frac{1}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}$
$F(t)=\frac{\pi - t}{2}$
$-\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kt)}{k}$
G(t)=ln(2sin(t))

## 10. Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\sin 2^{k^2} x}{2^k}$ ist gleichmäßig konvergent. $f$ ist stetig, aber nirgends differenzierbar.

LÖSUNG:

Die Reihe ist offensichtlich normal konvergent, somit ist die Grenzfunktion als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen selbst stetig. Die gliedweise abgeleitete Fourierreihe ist formal

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k^2-k} \cos 2^{k^2} x.$$

Für welche $x$ konvergiert diese Reihe? Keine Ahnung.

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{k^2-k} \sin 2^{k^2} x$ konvergiert z.B. für alle $x$ der Form $\pi\frac{p}{2^l}$, $p \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ und die liegen dicht.

Wir fragen uns hier aber, ob $f(x)$ differenzierbar ist. Um die Behauptung zu zeigen darf für $x \in \mathbb{R}$ der Limes des Differenzenquotienten, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nicht existieren. Dazu wählt man vier Teilfolgen $h_m = \frac{\pi}{2} 2^{-m^2} s$, $s = \pm 1, \pm 3$, wobei $\max\limits_{s=\pm 1,\pm 3} \cos(x + \frac{\pi}{4} s) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ausgenutzt werden wird. für die man wegen $\sin(x+h) - \sin(x) = 2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})$ erhält

$$f(x+h_m) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{1-k} \sin(2^{k^2-1} h_m) \cos 2^{k^2}(x + \tfrac{h_m}{2})$$

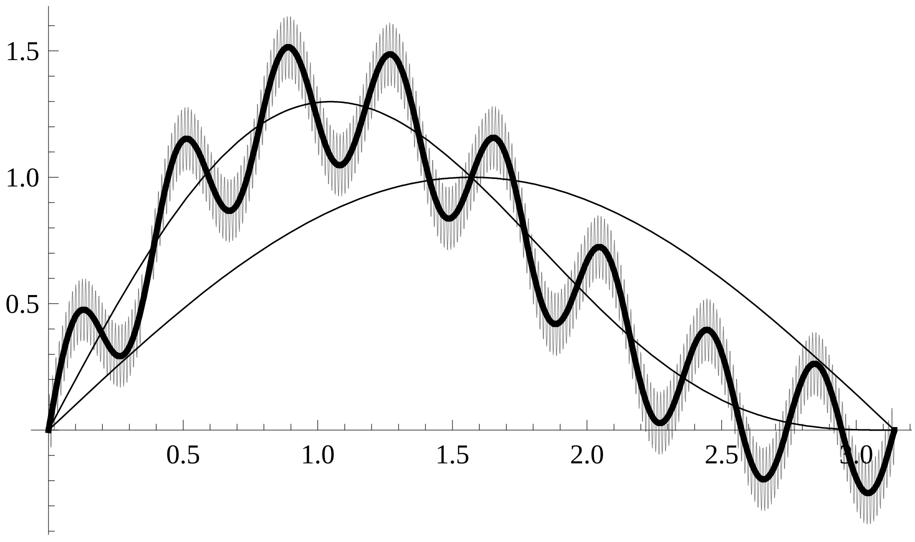
Für $k > m \geq 1$ ist $\sin(2^{k^2-1} h_m) = \sin(2^{k^2-m^2-2}\pi s) = 0$, die Reihe bricht bei $k = m$ ab.
Der $m$-te Summand ist

$$2^{1-m} \sin \tfrac{\pi}{4} s \cos(2^{m^2} x + \tfrac{\pi}{4} s)$$

Dieser Ausdruck ist für ein $s \in \{\pm 1, \pm 3\}$ vom Betrag immer größer als $2^{-m}$.
Für $k < m$ ist $|2^{1-k} \sin(2^{k^2-m^2-2}\pi s)| \leq 2^{k^2-k-m^2-1} 3\pi \leq 2^{-2m-k} 3\pi < 2^{-m-k-1}$, falls $m \geq 5$.
Insgesamt ist für mindestens ein $s \in \{\pm 1, \pm 3\}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} \right| &= \left| \frac{1}{h_m} \sum_{k=0}^{m} 2^{1-k} \sin(2^{k^2-1} h_m) \cos 2^{k^2}(x + \tfrac{h_m}{2}) \right| \\ &\geq \frac{1}{|h_m|} \left( 2^{-m} - \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-m-k-1} \right) \geq \frac{2^{-m-1}}{\frac{\pi}{2} 2^{-m^2}} \geq 2^{m^2-m-2} \end{aligned}$$

Es gibt also eine Nullfolge $\tilde{h}_m$, für die der Differenzenquotient unbeschränkt ist. Somit existiert kein Limes, $f$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ nicht differenzierbar.



## Hausaufgaben

### 11. Fourier-Koeffizienten

Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x) = x\cos x$, $x \in \left]-\pi, \pi\right[$.

LÖSUNG:

Die Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2, \ldots$ und $b_1$, $b_2$, $b_3, \ldots$ erhält man aus:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt\ , \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

Da $f$ ungerade ist, sind die Koeffizienten $a_k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gleich Null. Zur Bestimmung der Koeffizienten $b_k$ berechnen wir zunächst $\cos x\ \sin kx$:

$$\begin{aligned}\cos x\ \sin kx &= \frac{1}{4i}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{i(k+1)x} - e^{-i(k-1)x} + e^{i(k-1)x} - e^{-i(k+1)x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)\right)\ .\end{aligned}$$

Nun ergibt sich für $k \geq 2$

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\sin((k+1)x] + \sin((k-1)x))dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((k+1)x)}{(k+1)^2} - \frac{x\cos((k+1)x)}{(k+1)} + \frac{\sin((k-1)x)}{(k-1)^2} - \frac{x\cos((k-1)x)}{(k-1)}\right]_0^{\pi}\\ &= -\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} = (-1)^k\frac{2k}{k^2-1}\ .\end{aligned}$$

Für $k = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\ \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\, dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin 2x}{4} - \frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

Damit haben wir die Fourierreihe

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}\ \sin x + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k^2-1}\ \sin kx\right)\ .$$

**12. Anwendung des Riemann-Lebesgue-Lemmas**

Seien $f \in R[0, 2\pi]$ und $(a_k), (b_k)$ die zugehörigen Cosinus- und Sinus-Koeffizienten. Zeigen Sie mit Hilfe des Riemann-Lebesgue-Lemmas, dass $(a_k)$ und $(b_k)$ Nullfolgen sind.

Lösung:

Das Riemann-Lebesgue-Lemma besagt

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{irx} f(x) dx = 0.$$

Damit gilt natürlich auch

$$\lim_{r\to-\infty} \int_0^{2\pi} e^{irx} f(x) dx = \lim_{s\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{-isx} f(x) dx = \lim_{s\to\infty} \overline{\int_0^{2\pi} e^{isx} \overline{f(x)} dx} = 0,$$

da auch $\overline{f} \in R[0, 2\pi]$. Nun ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} \frac{dx}{2\pi} + \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \to 0, \quad \text{für } k \to \infty.$$

Entsprechend

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} \frac{dx}{2i\pi} - \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2i\pi} \to 0, \quad \text{für } k \to \infty.$$

**13. Rechenregeln für Fourierreihen**

Man zeige die Rechenregeln für Fourierreihen aus der Vorlesung. Sind $f, g$ $2\pi$-periodische Regelfunktionen, so gilt

(a) $(\widehat{f + \alpha g})_k = \hat{f}_k + \alpha \hat{g}_k$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

(b) $g(t) = \overline{f(t)} \Rightarrow \hat{g}_k = \overline{\hat{f}_{-k}}$,

(c) $g(t) = f(-t) \Rightarrow \hat{g}_k = \hat{f}_{-k}$,

(d) $g(t) = e^{int} f(t) \Rightarrow \hat{g}_k = \hat{f}_{k-n}$,

(e) $g(t) = f(t + a)$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{g}_k = e^{ika} \hat{f}_k$.

LÖSUNG:

(a) Additivität des Integrals.

(b) $\hat{g}_k = \int\limits_0^{2\pi} \overline{f(t)} e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} = \overline{\int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} \frac{dt}{2\pi}} = \overline{\hat{f}_{-k}}$.

(c) $\hat{g}_k = \int\limits_0^{2\pi} f(-t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} = - \int\limits_0^{-2\pi} f(t) e^{ikt} \frac{dt}{2\pi} = \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} \frac{dt}{2\pi} = \hat{f}_{-k}$.

(d) $\hat{g}_k = \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{int} e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} = \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{i(k-n)t} \frac{dt}{2\pi} = \hat{f}_{k-n}$.

(e) $\hat{g}_k = \int\limits_0^{2\pi} f(t+a) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} = \int\limits_a^{2\pi+a} f(t) e^{-ik(t-a)} \frac{dt}{2\pi} = e^{ika} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} \frac{dt}{2\pi} = e^{ika} \hat{f}_k$.

**14. Rechteckfunktion**

(a) Bestimmen Sie die Cosinus-Sinus-Darstellung von $f(t) = \mathrm{signum}(\sin t)$ mit Hilfe der Stammfunktion von $f$, die als $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$ geschrieben werden kann.

(b) Man skizziere $-\frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{(2k+1)^3}$ und berechne $1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} \pm \cdots$.

LÖSUNG:

(a) Die Stammfuntion $g(t) = \int\limits_0^t f(s)ds$ ist $2\pi$-periodisch wegen $\hat{f}_0 = 0$ und stetig. Es ist $g(t) = |t|$ für $t \in [-\pi, \pi]$. Die angegebene Reihe wurde in der Vorlesung als Fourierreihe von $g$ bestimmt. Somit erhält man die Fourierreihe von $f$ durch gliedweises differenzieren von

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \cdots)$$

als

$$f(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \cdots).$$

(b) Die Stammfunktion von $g$ ist nicht $2\pi$-periodisch, aber die Stammfunktion von $g - \hat{g}_0$, wobei $\hat{g}_0 = \frac{\pi}{2}$. Also ist die $2\pi$-periodische Funktion $h(t) = \int\limits_0^t (g(s) - \frac{\pi}{2})ds$ auf $[0, \pi]$ gegeben durch

$$h(t) = \int_0^t (g(s) - \tfrac{\pi}{2})ds = \tfrac{t^2}{2} - \tfrac{\pi}{2}t = \tfrac{1}{2}t(t - \pi).$$

Da $g$ gerade ist, ist $h$ ungerade, mithin $\hat{h}_0 = 0$ und für $t \in [-\pi, 0]$ ist

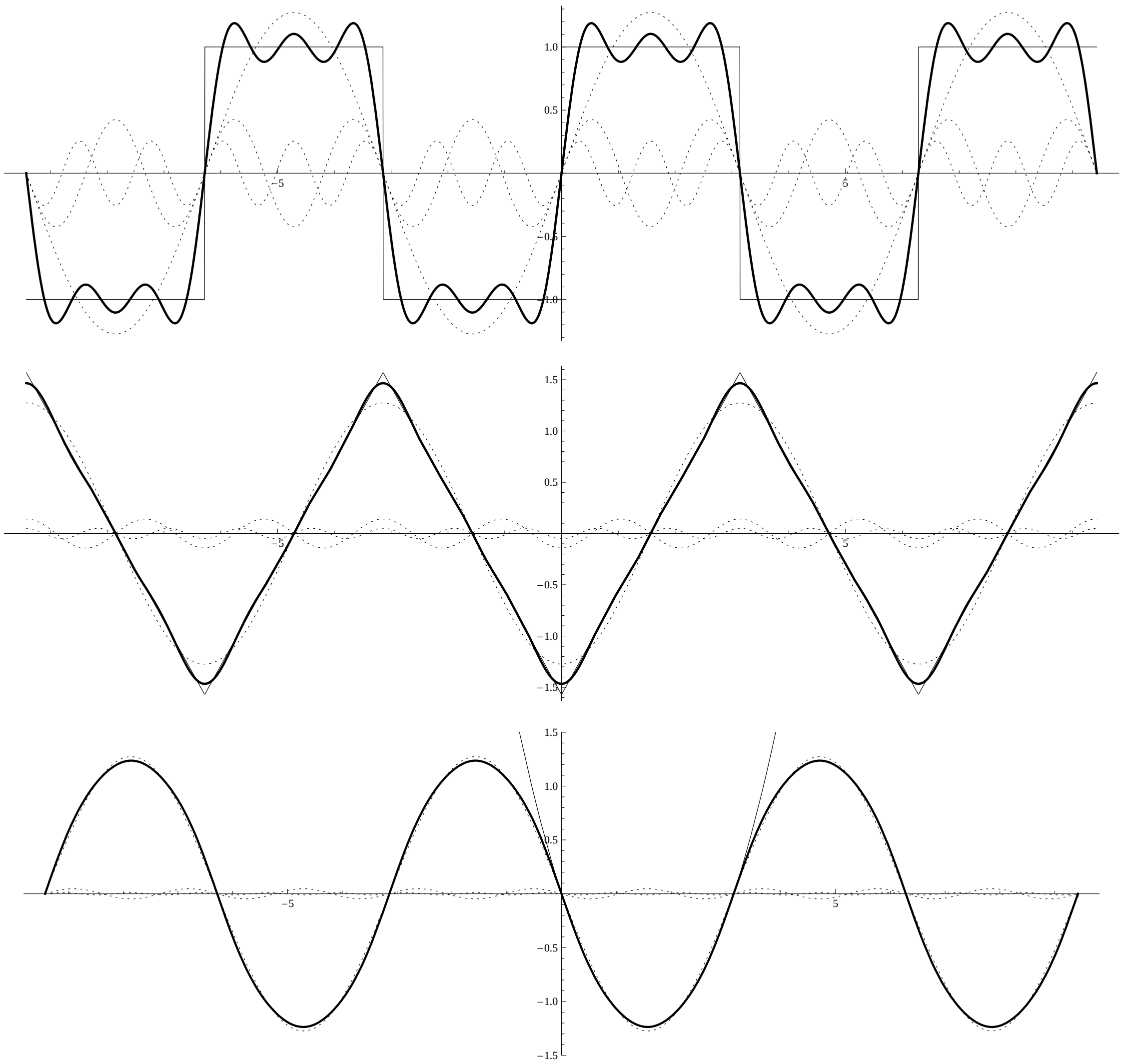
$$h(t) = -h(-t) = -\int_0^{-t} (g(s) - \tfrac{\pi}{2})ds = -\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{\pi}{2}t = -\tfrac{1}{2}t(t + \pi).$$

Gliedweise Integration von $g(t) - \frac{\pi}{2}$ ergibt

$$h(t) = -\frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{\sin 3t}{27} + \frac{\sin 5t}{125} + \cdots).$$

Für $t = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich $-\frac{\pi^2}{8} = h(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} \pm \cdots)$, bzw.,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = 1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} \pm \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$




Die Funktionen $f(t)$, $g(t) - \frac{\pi}{2}$ und $h(t)$.