Einschub: **Die Landau-Symbole $\mathcal{O}, o$**

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{D} \setminus D$. Für $f, g : D \to \mathbb{C}$ bedeutet

$$f \sim_a g \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad (f \text{ und } g \text{ sind asymptotisch gleich}),$$

$$f \in o_a(g) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad (f \text{ ist von kleinerer Ordnung als } g,\ f \text{ ist “klein Oh” von } g),$$

$$f \in \mathcal{O}_a(g) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists C, \epsilon > 0\, \forall x \in B_\epsilon(a) \cap D : |f(x)| \le C|g(x)|$$

(f ist von der gleichen Ordnung wie g, f ist “groß Oh” von g).

Bemerkungen

- Typischerweise ist $a = 0$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $\mathbb{R}^\pm$. D wird praktisch nie angegeben und ist als geeignet anzunehmen.
- a wird als Index fast immer weggelassen. Ist a aus dem Kontext nicht klar, wird “für $x \to a$” ergänzt.
- $a = \pm\infty$ ist auch zugelassen, wobei z.B. $B_\epsilon(+\infty) =]\frac{1}{\epsilon}, \infty[$.
- Häufig ist $g(x) = x^k$ für $k \in \mathbb{Z}$.
- Statt Funktionen schreibt man häufig Ausdrücke. Die Variable ist eindeutig oder wird aus dem Kontext klar. Also z.B. $\sin x \sim x$ für $x \to 0$, $\cos x - 1 \in \mathcal{O}(x^2)$.
- Weit verbreitet ist es, statt $\in, \subset$ einfach $=$ zu schreiben. Es gilt keine Symmetrie! Aus $\tan x \in \mathcal{O}_0(x) \subset o_0(1)$ wird $\tan x = \mathcal{O}(x) = o(1)$.
- Wählt man $D = \mathbb{N}$, $a = \infty$, so erhält man die Asymptotik und Landau-Symbole für Folgen, z.B. $\binom{n}{3} = \mathcal{O}(n^3)$.

Satz. Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ wie in der Definition.

(i) Aus $\limsup\limits_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$ folgt $f \in \mathcal{O}_a(g)$.

(ii) Existiert $\lim\limits_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$, so ist $f \in \mathcal{O}_a(g)$.

Beweis.

(i) Ist $h(x)$ eine reelle Funktion, so ist $\limsup\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \sup\{h(x) : x \in B_\epsilon(a) \cap D\}$ definiert. Ist $C = \limsup\limits_{x\to a} h(x) \in \mathbb{R}$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\sup\{h(x) : x \in B_\epsilon(a) \cap D\} \le C + 1$. Für $h(x) = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ folgt also: für alle $x \in B_\epsilon(a) \cap D$ gilt $|f(x)| \le (C+1)|g(x)|$. Mithin $f \in \mathcal{O}_a(g)$.

(ii) Aus $\lim\limits_{x\to a} h(x) = c$ folgt $\limsup\limits_{x\to a} h(x) = c$.

Zentralübung

1. Gleichmäßige, normale Konvergenz der Ableitungen einer Funktionenreihe

(a) Zeigen Sie: Ist (f_n) in $C^1([a,b])$ eine Funktionenfolge, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ existiert und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ gleichmäßig konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig und

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n.$$

(b) Gilt der Satz auch, wenn man in (a) "gleichmäßig" durch "normal" ersetzt?

LÖSUNG:

(a) Der Beweis beruht darauf, dass für $f \in C^1([a,b])$ gilt, dass $\|f\|_s \leq |f(a)| + (b-a)\|f'\|_s$ ist, denn aus

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt$$

folgt

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \int\limits_a^x \left|f'(t)\right| dt.$$

Sei $c = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(a)$ und $f(x) = c + \int\limits_a^x \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\right) dt$. Dann ist offenbar $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.
Wegen $f_k(x) = f_k(a) + \int\limits_a^x f_k'(t)dt$ gilt für alle $x \in [a,b]$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\right\|_s \quad \leq \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(a) - c\right| + (b-a)\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k'\right\|_s \to 0.$$

□

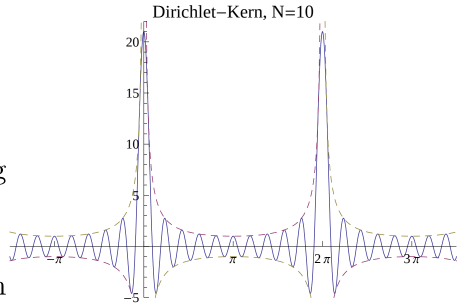
(b) Nein, z.B. $f_k(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.
Es muss dann auch gefordert werden, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ absolut konvergent ist.
In diesem Fall muss der Beweis nur leicht modifiziert werden:
Da aus normal konvergent gleichmäßig konvergent folgt, ist nur noch zu zeigen, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ normal konvergent ist. Dann lautet die letzte Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_s \quad \leq \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |f_k(a)|}_{\text{beschränkt}} + (b-a) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left\|f_k'\right\|_s}_{\text{beschränkt}} \leq const.$$

□

2. Dirichlet-Kern

Der N-te Dirichlet-Kern $D_N(t)$ ist definiert durch



$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}.$$

(a) Man zeige, dass $D_N(t)$ die stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ von $\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$, $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, ist.

(b) Geben Sie die Cosinus-Sinus-Darstellung von $D_N(t)$ an.

LÖSUNG:

(a) Für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ist mit $z = e^{it} \neq 1$

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{k=-N}^{N} z^k = \frac{z^{N+1} - Z^{-N}}{z-1} = \frac{z^{N+\frac{1}{2}} - z^{-N+\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t})}{\frac{1}{2}(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Für $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} 1 = 2N+1 = \lim_{s\to t} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})s}{\sin\frac{s}{2}} = \lim_{s\to t} D_N(s)$, wegen l'Hospital.

(b) Die Fourierkoeffizienten c_n des Dirichlet-Kerns lauten $c_n = 1_{\{-N,\ldots,N\}}(n)$.
Wegen $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ ist $a_0, \cdots, a_N = 2$, alle anderen Koeffizienten sind gleich Null. Somit

$$D_N(t) = 1 + 2\cos t + 2\cos 2t + \cdots + 2\cos Nt.$$

3. Césaro-Summe

Sei (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge (c_n) der Césaro-Summen von (a_n), $c_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, gegen den gleichen Wert konvergiert, wie (a_n).

(b) Wie verändert sich der Beweis, wenn (a_n) eine Funktionenfolge in dem Banachraum $(B(X), \|\cdot\|_s)$ ist?

(c) Geben Sie eine divergente reelle Folge an, deren Césaro-Summe konvergent ist.

(d) Geben Sie eine alternierende reelle Folge an, deren Césaro-Summe divergiert.

(e*) Gibt es eine unbeschränkte Folge, deren Césaro-Summe konvergiert?

LÖSUNG:

(a) Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zu $\epsilon > 0$ wählt man ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Dann ist für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned} |c_n - a| &= \left|\left(\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - a\right| = \left|\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \leq \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a| \\ &\leq \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}|a_k - a| + \tfrac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|a_k - a| \\ &\leq \tfrac{1}{n}C + \tfrac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

wobei $C = \sum\limits_{k=1}^{N-1}|a_k - a| \in \mathbb{R}$. Ist nun $n \geq \max\{N, \frac{2C}{\epsilon}\}$, so folgt $|c_n - a| < \epsilon$.

(b) In (a) muss man lediglich $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_s$ ersetzen.

(c) $a_n = (-1)^n$ ist divergent, aber $c_n = \frac{-1+(-1)^n}{2n}$ konvergiert gegen 0.

(d) $a_n = (-1)^n(2n-1)$, also die Folge $-1, 3, -5, 7, \ldots$. Ihre Césaro-Summe ist $c_n = (-1)^n$, also divergent.

(e*) $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$ ist unbeschränkt. Für gerade $n = 2k$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq c_n &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\sqrt{2k} - \sqrt{2k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} \\ &\leq \frac{1}{n}\left(const + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx\right) \leq \frac{1}{n}\left(const + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\right) \to 0 \end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Da $|c_n - c_{n-1}| = |\frac{1}{n}a_n| = n^{-\frac{1}{2}} \to 0$ konvergiert auch die Teilfolge der ungeraden Césaro-Summen gegen 0. Insgesamt also $c_n \to 0$.

Hausaufgaben

4. Taylorentwicklung einer Stammfunktion der Gaußkurve

Blatt 4, Aufgabe 1 Math. II, FU Darmstadt 1936:

$$\int e^{-x^2}dx$$

läßt sich nicht in geschlossener Form auswerten.

(a) Man gebe eine Reihenentwicklung dafür an.

(b) Man berechne mit dieser Reihe

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

auf drei Stellen genau.

(c) Das bestimmte Integral ist durch eine Skizze zu veranschaulichen.

HINWEIS: siehe Überschrift

LÖSUNG:

(a) $\exp(-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 \pm \cdots$
mit Konvergenzradius ∞. Somit ist
$\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} \pm \cdots.$
Für eine beliebige Stammfunktion von e^{-x^2} gilt also

$$\int e^{-x^2}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

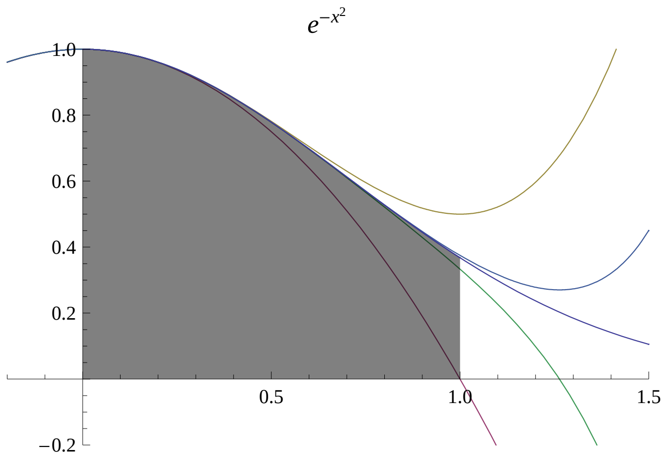
(b) Nach (a) ist

$$s = \int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \pm \cdots$$

Dies ist eine Leibnizreihe, der Grenzwert liegt immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilsummen. Somit ist $s \in (s_5, s_5 + \epsilon)$ mit $s_5 = \sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ und $\epsilon = \frac{1}{6!\cdot 13} = \frac{1}{9360} \approx 1.1 \times 10^{-4}$. Auf drei Stellen genau gilt also

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{31049}{41580} \approx 0.747$$

(c) Der Integrand und seine ersten Taylorpolynome.



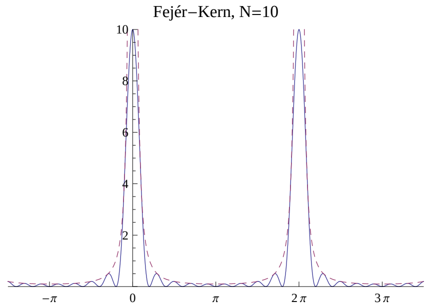
5. Fejér-Kern

Der N-te Fejér-Kern $F_N(t)$ ist als arithmetisches Mittel von Dirichlet-Kernen definiert durch

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t).$$

(a) Man zeige, dass $F_N(t)$ die stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ von $\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{N}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$, $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, ist.
HINWEIS: Man wandle den Ausdruck $N\sin^2(\frac{t}{2})F_N(t)$ in eine Teleskopsumme um.

(b) Geben Sie die Cosinus-Sinus-Darstellung von $F_N(t)$ an.



LÖSUNG:

(a) Der Dirichlet-Kern ist $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$ für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ist mit $z = e^{it} \neq 1$

$$\begin{aligned} N\sin^2(\tfrac{t}{2})F_N(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\tfrac{t}{2}\sin(n+\tfrac{1}{2})t = \sum_{n=0}^{N-1}(\cos nt - \cos(n+1)t) \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos Nt) = \sin^2(\tfrac{1}{2}Nt), \end{aligned}$$

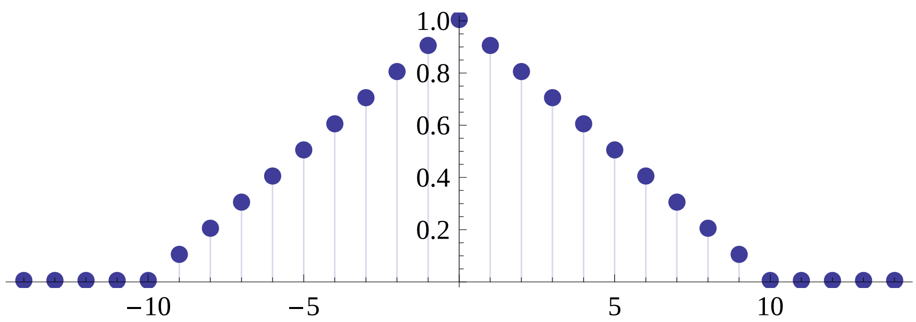
da $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$.
Für $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist $F_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(2n+1) = N = \lim_{s\to t}\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{N}{2}s}{\sin\frac{s}{2}}\right)^2 = \lim_{s\to t} F_N(s)$, wegen l'Hospital, da $1+3+5+\cdots(2N-1) = N^2$.

(b) Die Fourierkoeffizienten $d_k^{(n)}$ des n-ten Dirichlet-Kerns sind $d_k^{(n)} = 1_{\{-n,\dots,n\}}(k)$. Wegen der Linearität lauten die Fourierkoeffizienten c_k von $F_N(t)$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} d_k^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{N} & \text{falls } |k| \leq N, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$ ist $a_k = \max\{2(1-\frac{|k|}{N}), 0\}$, $b_n = 0$. Somit ist

$$F_N(t) = 1 + 2(1-\tfrac{1}{N})\cos t + 2(1-\tfrac{2}{N})\cos 2t + \cdots + \tfrac{2}{N}\cos(N-1)t.$$



Die Fourier-Koeffizienten c_n von F_{10}

6. Fourierreihen modifizierter Funktionen

(a) Welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt die Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{|k|!}$, $k \in \mathbb{Z}$?

(b) Wie lauten die Fourierkoeffizienten von $g(x) = e^{\sin x} \cos(\cos x)$?

(c) Wie lauten die Fourierkoeffizienten von $h(x) = e^{\cos 2x} \cos(\sin 2x)$?

(d*) Wie lauten die Fourierkoeffizienten von $p(x) = -1 + 2e^{2\cos x} \cos(2 \sin x)$?

LÖSUNG:

(a) Mit der geometrischen Reihe erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|k|!} e^{ikx} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(e^{ix})^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(e^{-ix})^k \\ &= -1 + e^{e^{ix}} + e^{e^{-ix}} = -1 + e^{\cos x}(e^{i\sin x} + e^{-i\sin x}) = -1 + 2e^{\cos x}\cos(\sin x) \end{aligned}$$

(b) $g(x) = e^{\cos(x-\frac{\pi}{2})} \cos(-\sin(x-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2} f(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}$. Nun ist

$$\widehat{f(\cdot - \tfrac{\pi}{2})} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tfrac{\pi}{2}) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} f(y) e^{-ik(y+\frac{\pi}{2})} \frac{dy}{2\pi} = e^{-i\frac{\pi}{2}k} \hat{f}_k = (-i)^k \hat{f}_k.$$

Somit ist $\hat{g}_k = \frac{i^k}{2(|k|)!}$ für $k \neq 0$ und $c_0 = 1$.

(c) $h(x) = \frac{1}{2} f(2x) + \frac{1}{2}$. Es ist

$$\begin{aligned} \widehat{f(2\,\cdot)} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(y) e^{-ik\frac{y}{2}} \frac{dy}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{0} f(y) e^{-ik\frac{y}{2}} \frac{dy}{2\pi} + \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} f(y) e^{-ik\frac{y}{2}} \frac{dy}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}(e^{ik\pi} + 1) \int_{0}^{2\pi} f(y) e^{-i\frac{k}{2}y} \frac{dy}{2\pi} = \begin{cases} \hat{f}_{\frac{k}{2}}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist $\hat{h}_{2k} = \frac{1}{2(|k|!)}$ für $k \neq 0$ und $c_0 = 1$, $\hat{h}_{2k+1} = 0$.

(d*) Wir verfolgen die Schritte in (a) rückwärts,

$$\begin{aligned} -1 + 2e^{2\cos x} \cos(2\sin x) &= -1 + e^{2\cos x}(e^{2i\sin x} + e^{-2i\sin x}) = -1 + e^{2e^{ix}} + e^{2e^{-ix}} \\ &= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(2e^{ix})^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(2e^{-ix})^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2^{|k|}}{|k|!} e^{ikx}, \end{aligned}$$

Somit ist $\hat{p}_k = \frac{2^{|k|}}{|k|!}$.

7. Sägezahn- und Dreicksfunktion

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $f(x) = \max\{0, x\}$ für $x \in]-\pi, \pi]$. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten und das asymptotische Verhalten ihrer Beträge für große k, von

(a) f, (b) g, mit $g(x) = f(-x)$, (c) $h = f + g$.

Skizzieren Sie jeweils den Graphen und geben Sie die ersten Summanden der Cosinus-Sinus-Darstellung an. Konvergiert die Fourierreihe jeweils gegen die entsprechende Funktion?

Lösung:

(a) Wir berechnen $\hat{f}_0 = \frac{\pi}{4}$ und für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}\hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} xe^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{x}{-ik}e^{-ikx}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}dx\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik} + \left[\frac{e^{-ikx}}{k^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{i(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2}.\end{aligned}$$

Offenbar ist $\lim_{|k|\to\infty} k|\hat{f}_k| = frac12$, d.h. $\hat{f}_k = \mathcal{O}(k^{-1})$.

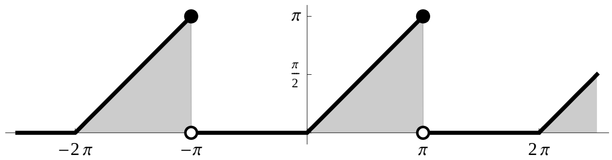
(b) $g(x) = f(2\pi - x) = f(-x)$. Somit ist

$$\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx = \hat{f}_{-k} = \overline{\hat{f}_k}$$

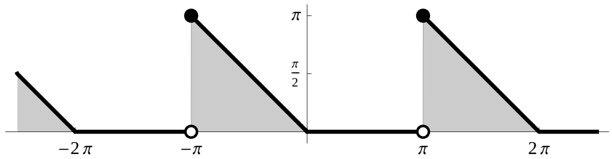
mit der selben Asymptotik wie in (a).

(c) $\hat{h}_k = (\widehat{f+g})_k = \hat{f}_k + \hat{g}_k = \hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$, wobei offenbar $\hat{h}_k = \mathcal{O}(k^{-2})$.

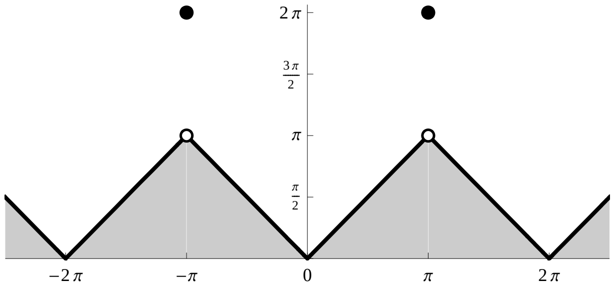
$$\begin{aligned}f(x) &= \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{2\cos x}{\pi} - \tfrac{2\cos 3x}{9\pi} - \cdots\\ &\quad + \sin x - \tfrac{\sin 2x}{2} + \tfrac{\sin 3x}{3} \pm \cdots\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}g(x) &= \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{2\cos x}{\pi} - \tfrac{2\cos 3x}{9\pi} - \cdots\\ &\quad - \sin x + \tfrac{\sin 2x}{2} - \tfrac{\sin 3x}{3} \pm \cdots\end{aligned}$$



$$h(x) = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{4\cos x}{\pi} - \tfrac{4\cos 3x}{9\pi} - \cdots$$



Die Fourierreihen von f, g und h konvergieren für $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ gegen die entsprechende Funktion, bei $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ jedoch jeweils gegen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ und π.