TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik (Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 0
(21.04.2010)

Tutoraufgaben

1. Punktweise, gleichmäßige, normale Konvergenz von Funktionenreihen

(a) Wiederholen Sie die Begriffe punktweise, gleichmäßige und normale Konvergenz von Funktionenreihen in $B([0,1])$.

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den drei Konvergenzbegriffen?

Lösung:

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B[0,1]$, und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise gegen $f :\Longleftrightarrow \forall x \in [0,1] : \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $f :\Longleftrightarrow \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k - f \right\|_s \to 0$ oder

$\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, \forall x \in [0,1] \,:\, \left| \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \epsilon$.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert normal $:\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_s < \infty$, oder

$\exists C > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in [0,1] \,:\, \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k(x)| < C$.

(b) Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt trivialerweise punktweise Konvergenz. Aus normaler Konvergenz (absoluter Konvergenz in $(B[0,1], \|\cdot\|_s)$) folgt gleichmäßige Konvergenz (Konvergenz in $(B[0,1], \|\cdot\|_s)$) genauso wie für reellwertige Reihen, weil $(B[0,1], \|\cdot\|_s)$ ein Banachraum ist (Weierstraß-Kriterium).
Die Umkehrung gilt jeweils nicht.

$f_n(x) = x^n$ konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen $f(x) = \text{floor}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$,
aber nicht gleichmäßig, sonst wäre ja f stetig.

$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = -\ln 2$, wegen Leibniz-Kriterium, aber nicht normal, da die harmonische Reihe divergiert.

2. Konvergenzradius von Potenzreihen

Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $c_n, a \in \mathbb{C}$, habe den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}^+$.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ weiß man nichts über die Konvergenz der Reihe?

(c) Wie groß ist ρ für $c_n = n^k$, $k \in \mathbb{Z}$?

(d) Wie groß ist ρ für $c_n = k^n$, $k \in \mathbb{R}^+$?

(e) Wie groß ist ρ für $c_n = n^5 e^{\alpha n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$?

LÖSUNG:

(b) Für $z \in U_a(\rho) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < \rho\}$ gilt absolute Konvergenz, für $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| > \rho\}$ divergiert die Reihe. Auf der Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| = \rho\}$ kann nichts allgemeines über die Konvergenz der Reihe ausgesagt werden. Beispiele:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert absolut auf der Einheitskreislinie.
Dagegen ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ dort überall divergent.

(c) $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k}} = \frac{1}{(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^k} = 1.$

(d) $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k^n}} = \frac{1}{k}.$

(e) $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = e^{-\alpha}.$

3. Taylorreihen einfacher Funktionen

Geben Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen mit ihrem Konvergenzradius an:

(a) $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$ um $x = 0$,

(b) $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ um $x = 0$,

(c) $\frac{1}{z-b}$, $\frac{1}{(z-b)^2}$ um $a \in \mathbb{C}$. HINWEIS: Cauchy-Produkt

LÖSUNG:

(a) $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$, $\rho = 1$,

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \pm \cdots$, $\rho = 1$,

$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$, $\rho = 1$,

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \pm \cdots$, $\rho = 1$,

$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+y} dy = \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-y)^k \right) dy = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots$, $\rho = 1$,

$\arctan x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+y^2} dy = \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-y^2)^k \right) dy = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \pm \cdots$, $\rho = 1$.

(b) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$, $\rho = \infty$,

$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \pm \cdots$, $\rho = \infty$,

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \pm \cdots$, $\rho = \infty$,

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \pm \cdots$, $\rho = \infty$,

$(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \cdots$, $\rho = 1$.

(WS09/10, Analysis 1 für Physik, Blatt 9, Z3)

(c) $\frac{1}{z-b} = \frac{-1}{(b-a)-(z-a)} = \frac{-1}{b-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}} = \frac{-1}{b-a} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n = -\frac{1}{b-a} - \frac{z-a}{(b-a)^2} - \frac{(z-a)^2}{(b-a)^3} - \cdots$,

konvergent genau für $\left|\frac{z-a}{b-a}\right| < 1$, d.h. der Konvergenzradius ist $|b-a|$, nämlich der Abstand des Entwicklungspunktes vom Pol.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-b)^2} &= \frac{1}{(b-a)^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^m \right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n = \frac{1}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} + 2\frac{x-a}{(b-a)^3} + 3\frac{(x-a)^2}{(b-a)^4} + \cdots .
\end{aligned}$$

Konvergenzradius ist unverändert $|b-a|$.

4. Taylorformel und Restglied

(a) Wie lautet die Taylorformel für $f \in C^{n+1}(\,]-1,1[)$ bei 0 bis zur Ordnung n?

(b) Wie lautet die Cauchy-Form des Restglieds und wie folgt daraus $R_{n+1}(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$?

(c) Wie lautet die Lagrange-Form des Restglieds und wie folgt daraus $R_{n+1}(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$?

(d) Es gilt sogar $R_{n+2}(x) = o(x^{n+1})$. Zeigen Sie dies per Induktion über n.

LÖSUNG:

(a) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f(n)(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$.
Dies definiert lediglich die Funktion $R_{n+1}(x)$.

(b) Laut Vorlesung ist $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. Da $f^{(n+1)}$ stetig auf $[0, \frac{1}{2}]$ ist, ist sie dort beschränkt durch ein $C \in \mathbb{R}$. Somit ist

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n |f^{(n+1)}(t)|dt \leq \frac{C}{n!}\left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{C}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Die gleiche Argumentation für $f(-x)$ mit $x \in [0, \frac{1}{2}]$ liefert $R_{n+1}(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$.

(c) Laut Vorlesung gibt es zu jedem $x \in]-1,1[$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$R_{n+1}(X) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Da $f^{(n+1)}$ auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ stetig und damit beschränkt ist, folgt sofort $R_{n+1}(x) = \mathcal{O}(x^{n+1})$.

(d) $n = 0$: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Zu zeigen ist $R_2(x) = f(x) - (f(0) + f'(0)x) = o(x)$. Dies gilt, da

$$\frac{R_2(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) \to 0 \quad \text{für } x \to 0.$$

Der Induktionsanfang ist nichts anderes als die Definition der Ableitung.
Sei die Aussage für $n-1$ gezeigt. Für $f \in C^{n+1}(\,]-1,1[)$ ist $f' \in C^n(\,]-1,1[)$. Somit ist $f'(x) = f'(0) + f''(0)x + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}x^n + \tilde{R}_{n+1}(x)$ mit $\tilde{R}_{n+1}(x) = o(x^n)$. Das gesuchte Restglied von f ist nun einfach

$$R_{n+2}(x) = f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}\right) = \int\limits_0^x \tilde{R}_{n+1}(t)dt.$$

l'Hospital ergibt

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_{n+2}(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tilde{R}_{n+1}(x)}{(n+1)x^n} = 0,$$

also $R_{n+2}(x) = o(x^{n+1})$.