....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 3 für Physiker
(Analysis 2)

Prof. Dr. D. Castrigiano

3. August 2010, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **83 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Fourierreihen** **(12 Punkte)**

Sei f 2π-periodisch mit $f(t) = t^2$ für $t \in [-\pi, \pi[$.

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$ von f.

(b) Die Fourierreihe von f an der Stelle t ist $Sf(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$. Begründen Sie kurz, warum folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) Sf konvergiert gleichmäßig auf jedem Kompaktum.

(ii) Sf konvergiert gleichmäßig.

(iii) $Sf(t)$ konvergiert absolut für jedes t.

(iv) Sf konvergiert normal.

2. **Matrixexponential** **(10 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 zu den Eigenvektoren $b_1 = \binom{2}{1}$ und $b_2 = \binom{2}{-1}$ von A an.

$\lambda_1 =$	$\lambda_2 =$

(b) Berechnen Sie damit das Matrixexponential e^{tA} (Rechenweg wird gewertet).

(c) Wie lautet die Lösung der AWA $y' = Ay$, $y(1) = \binom{0}{1}$?

3. **Komposition Lipschitz-stetiger Funktionen** **(9 Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Funktionen $f, g : X \to X$ seinen Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L bzw. M.

(a) Man zeige: $f \circ g$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante LM.

(b) Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $f \circ g$ eine Kontraktion ist.

(c) Man gebe konkret einen metrischen Raum (X, d) und zwei Funktionen $f, g : X \to X$ an, die kleinstmögliche Lipschitz-Konstanten $L = M = 2$ haben, für die $f \circ g$ eine Kontraktion ist.

4. **Differenzierbarkeit** **(12 Punkte)**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Sei $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$. Man berechne

$\partial_v f(0) =$	$\partial_1 f(0) =$	$\partial_2 f(0) =$

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.

5. **Taylor-Formel** **(10 Punkte)**

Gegeben sei eine Funktion $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$ mit

$$f(0) = 3, \quad \partial_1^2 f(0) = \partial_1\partial_2 f(0) = \partial_2\partial_1 f(0) = -2, \quad \partial_2^3 f(0) = \partial_1^2\partial_2 f(0) = \partial_1\partial_2\partial_1 f(0) = \partial_2\partial_1^2 f(0) = 1.$$

Alle nicht angegebenen ersten, zweiten und dritten partiellen Ableitungen sind im Nullpunkt gleich 0.

(a) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von f im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

$f(x, y) =$ $+R_4(x, y)$

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ kann man $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_4(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^k} = 0$ folgern?

☐ $k = 0$ ☐ $k = 1$ ☐ $k = 2$ ☐ $k = 3$ ☐ $k = 4$ ☐ $k = 5$

(c) Wie lautet die Taylorentwicklung von $g(t) = f(5t, t)$ bis zur dritten Ordnung in t im Entwicklungspunkt 0 explizit?

$g(t) =$ $+R_4(t)$

6. **Implizit definierte Funktionen** **(8 Punkte)**
Sei $f(x,y,z) = xz - e^{yz-x}$ und $P = (2, 4, \frac{1}{2})$. Es gilt $f(P) = 0$. Die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ soll in einer Umgebung des Punktes P lokal nach z aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(x,y) \mapsto \tilde{z}(x,y)$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f(x,y,z)$.

$\operatorname{grad} f(x,y,z) =$

(b) Wie lautet die Formel für $\operatorname{grad} \tilde{z}(x,y)$ für (x,y) aus dem Definitionsbereich von $\tilde{z}$?

$\operatorname{grad} \tilde{z}(x,y) =$

(c) Berechnen Sie $\operatorname{grad} \tilde{z}(2,4)$.

$\partial_x \tilde{z}(2,4) =$

$\partial_y \tilde{z}(2,4) =$

7. **Extrema mit Nebenbedingungen** **(8 Punkte)**
Wenden Sie die Methode des Lagrange-Multiplikators an, um die Kandidaten für lokale Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x + y^2 = 1$ zu finden.

8. **Leibnizregel, Kettenregel** **(8 Punkte)**

(a) Sei $F(x) := \int\limits_1^x f(x,y)dy$ mit $f(x,y) = \frac{e^{-xy}}{y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie $F'(x)$ für $x > 0$.

$F'(x) =$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $f(X) = \exp(\mathrm{Spur}(X))$. Geben Sie Definitions- und Wertebereich und die Abbildungsvorschrift von $Df(A)$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ explizit an.
Hinweis: $\mathrm{Spur} : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ ist linear.

9. **Gewöhnliche Differentialgleichungen** **(6 Punkte)**
Gegeben sei die AWA $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$. Wie lautet die Lösung dieser AWA mit maximalem Lösungsintervall.