Zentralübung

84. Exakte Differentialgleichungen

Sei $F \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und sternförmig und sei die Gleichung $F(x,y) = const$ im Punkt (x_0, y_0) nach y auflösbar.

(a) Die dadurch implizit definierte Funktion $\tilde{y}(x)$ ist eine Lösung des AWA $y' = f(x,y)$, $\tilde{y}(x_0) = y_0$, falls $f(x,y) = -\frac{\partial_1 F(x,y)}{\partial_2 F(x,y)}$. F heißt *(lokale) Konstante der Bewegung* dieser Differentialgleichung. Warum?

(b) Seien $g, h \in C^1(D)$ und $\partial_2 g = -\partial_1 h$. Ist $h(x_0, y_0) \neq 0$, so gibt es eine (lokale) Konstante der Bewegung F zur Differentialgleichung $y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$.

(c) Wie lautet eine Konstante der Bewegung für $y' = h(x)g(y)$?

(d) Man finde eine Konstante der Bewegung für die folgenden Differentialgleichungen und skizziere ihre Höhenlinien:

(i) $y' = -\frac{x}{y}$, (ii) $y' = 2\frac{y}{x}$, (iii) $y' = -\frac{2xy}{2y+x^2}$.

LÖSUNG:

(a) Für die impliziert definierte Funktion $\tilde{y}(x)$, für die $F(x, \tilde{y}(x)) = const$ ist mit $\tilde{y}(x_0) = y_0$ gilt nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\tilde{y}'(x) = -\frac{\partial_1 F(x,y)}{\partial_2 F(x,y)}$$

Dies ist die oben erwähnte Differentialgleichung für $\tilde{y}(x)$. F heißt "Konstante der Bewegung" für diese Differentialgleichung, da F entlang von Lösungen dieser Differentialgleichung konstant ist.

(b) Aus $\partial_2 g = -\partial_1 h$ folgt, dass das Vektorfeld $v : D \to \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = (-g, h)$ wirbelfrei und damit konservativ ist. Für eine zugehörige Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ gilt $g = -\partial_1 F$, $h = \partial_2 F$. Nach (a) ist F konstante der Bewegung der Differentialgleichung $y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$.

(c) $y' = h(x)g(y) = \frac{h(x)}{\frac{1}{g(y)}}$. Dies ist eine separable Differentialgleichung. Ein Potential des Vektorfeldes $(x,y) \mapsto (-h(x), \frac{1}{g(y)})$ ist $-H(x) + G(y)$, wobei $H(x) = \int h(x)dx$, $G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy$.

(d) (i) $y' = -\frac{x}{y} = \frac{-x}{y}$. Nach (c) ist $H(x) = -\int x dx = -\frac{x^2}{2}$ und $G(y) = \int y dy$. Damit ist $F(x,y) = G(y) - H(x) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ eine Konstante der Bewegung. Die Lösungen liegen also auf Kreisen, $y(x) = \sqrt{C - x^2}$, $C > 0$.

(ii) $y' = 2\frac{y}{x}$, $H(x) = \int \frac{2}{x} dx = \log(x)^2$, $G(y) = \int \frac{2}{y} dy = \log y$. Die Funktion $F(x,y) = \log(\frac{|y|}{x^2}$ ist eine Konstante der Bewegung, für $x, y \neq 0$. Natürlich ist dann auch $\exp(F)(x,y) = \frac{y}{x^2}$ eine Konstante der Bewegung. Auch hier müssen allerdings die vier Quadranten gesondert betrachtet werden.

(iii) $y' = \frac{-2xy}{2y+x^2} = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$. Es ist $\partial_2 g(x,y) = -2x = -\partial_1 h(x,y)$. Für ein Potential zu $(-g, h)$ muss $\partial_1 F(x,y) = 2xy$ gelten, also $F(x,y) = x^2 y + h(y)$. Damit $\partial_2 F(x,y) = 2y + x^2$ gilt wählt man $F(x,y) = y^2 + x^2 y + \tilde{h}(x)$. Insgesamt ist also $F(x,y) = y^2 + x^2 y$ ein Potential und damit eine Konstante der Bewegung.

85. Eindeutigkeit lokaler Lösungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = 2\sqrt{|y|}$.

(a) Für welche $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ hat die Differentialgleichung lokal eindeutige Lösungen?

(b) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\tilde{y}(x)$ an, für die $\tilde{y}(1) = 1$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Lösungen zum Anfangswert $\tilde{y}(1) = 1$ gibt.

LÖSUNG:

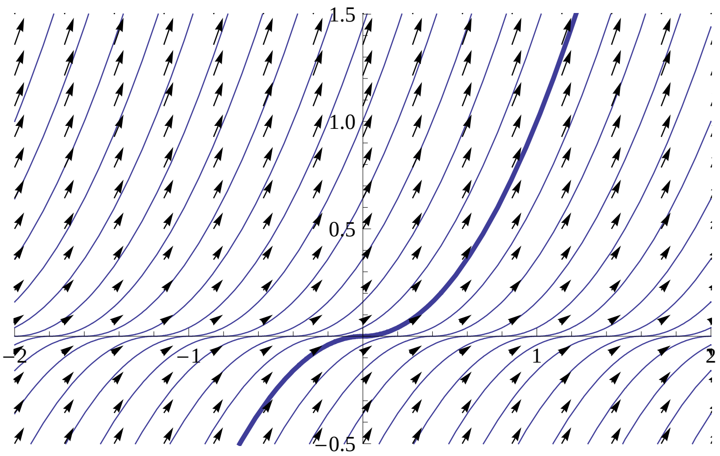
(a) Für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist $(x, y) \mapsto 2\sqrt{|y|}$ stetig und differenzierbar bezüglich y. Somit ist die Funktion dort lokal Lipschitzstetig und damit existieren lokale Lösungen der Differentialgleichung und sind auch lokal eindeutig.

(b) $\tilde{y}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung der Differentialgleichung.

(c) Für $x_0 \leq 0$ ist jeweils

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x_0 \leq x \geq 0 \\ -(x - x_0)^2, & x < x_0 \end{cases}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des AWA, wie man leicht einsieht.



86. Picard-Iteration

Man löse die AWA $\dot{y}_1 = 2ty_2, \dot{y}_2 = -2ty_1,\ y(0) = (0,1)$, durch die Picard-Iteration, $x_n(t) = y(0) + \int\limits_0^t f(s, x_{n-1}(s))ds$. Wie lautet $x_{2n}(t)$?

Lösung:

Man wählt die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(t,x) = (2tx_2, -2tx_1)$ Mit $x_0(t) = (0,0)$ ist

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \\
x_2(t) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix}2s\\0\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}t^2\\1\end{pmatrix}, \\
x_3(t) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix}2s\\-2s^3\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}t^2\\1-\frac{1}{2}t^4\end{pmatrix}, \\
x_4(t) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix}2s - s^5\\-2s^3\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}t^2 - \frac{1}{6}t^6\\1-\frac{1}{2}t^4\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

Man errät

$$
x_{2n}(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}, \qquad x_{2n+1}(t) = x_{2n}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^n \frac{(t^2)^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix}.
$$

und zeigt dies mittels vollständiger Induktion. Man erhält $x_\infty(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = \begin{pmatrix}\sin t^2\\ \cos t^2\end{pmatrix}$ und überprüft leicht, dass dies eine Lösung oboger AWA ist.

Hausaufgaben

87. Fourierreihen

Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sin\frac{t}{2}$.

(a) Welche Beziehungen zwischen den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$ können Sie aus der Form von f erschließen?

☐ $\hat{f}_k = -\overline{\hat{f}_{-k}}$ ☒ $\hat{f}_k = \hat{f}_{-k}$ ☒ $\hat{f}_k \in \mathbb{R}$ ☐ $\hat{f}_k \in i\,\mathbb{R}$

(b) Welches asymptotische Verhalten der Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$ können Sie aus der Form von f erschließen?

☒ $\hat{f}_k \to 0$ für $|k| \to \infty$.

☐ $k^2 \hat{f}_k \to 0$ für $|k| \to \infty$.

☒ $k\hat{f}_k \to 0$ für $|k| \to \infty$.

☒ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k$ ist absolut konvergent.

(c) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$ von f,

$$\boxed{\hat{f}_k = \frac{2}{\pi(1-4k^2)}}$$

(d) Wie lauten die Fourierkoeffizienten von $[0, 2\pi[\, \ni t \mapsto g(t) = \cos\frac{t}{2}$?

$$\boxed{\hat{g}_k = \frac{4ik}{\pi(1-k^2)}}$$

LÖSUNG:

(a) f ist reell, daraus folgt, dass $\hat{f}_{-k} = \overline{\hat{f}_k}$.
f ist symmetrisch, daraus folgt $\hat{f}_k \in \mathbb{R}$. Also gilt auch $\hat{f}_k = \hat{f}_{-k}$.

(b) Man kann das Ergebnis in (c) benutzen.
Ohne (c) gelten folgende Betrachtungen: Wegen des Riemann-Lebesgue-Lemmas für f und seine Ableitung folgt $\hat{f}_k \to 0$ und $k\hat{f}_k \to 0$.
Da die periodische Fortsetzung der Ableitung Unstetigkeitsstellen genau in $2\pi\mathbb{Z}$ besitzt, ansonsten aber differenzierbar ist, ist f' von der Form

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2}{\pi}\frac{\pi - t}{2} + g(t) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k} + g(t), \end{aligned}$$

wobei g stetig ist. Die Fourierreihe von g konvergiert also gleichmäßig, also $\hat{g}_k = o(\frac{1}{k})$.
Also gilt $|k\widehat{f'}_k| \to \frac{1}{\pi}$ und somit $|k^2\hat{f}_k| \to \frac{1}{\pi} \neq 0$.
Da die periodische Fortsetzung von f Stammfunktion der periodischen Fortsetzung von $[0, 2\pi[\mapsto \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$ ist, ist nach Kap. 12, Satz 23, die Fourierreihe von f normal konvergent, und damit $Sf(0)$ absolut konvergent gegen $f(0) = 0$.

(c) $\hat{f}_k = \frac{1}{2i}\int\limits_0^{2\pi}(e^{\frac{1}{2}it} - e^{-\frac{1}{2}it})e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{4i\pi}\left[\frac{e^{-i(k-\frac{1}{2})t}}{-i(k-\frac{1}{2})} - \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})t}}{-i(k+\frac{1}{2})}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{i\pi}-1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{e^{-i\pi}-1}{k+\frac{1}{2}}\right)$
$= \frac{2}{\pi(1-4k^2)}$.

(d) Wegen $g(t) = \cos\frac{t}{2} = 2f'(t)$ auf $[0, 2\pi[$ ist $\hat{g}_k = 2ikf_k$.

88. Wegzusammenhang

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend. Man zeige: Außer $\emptyset$ und D gibt es keine Teilmenge von D, die bezüglich der induzierten Metrik auf D zugleich offen und abgeschlossen ist.

LÖSUNG:

Sei $\emptyset \neq A \subset D$ offen und abgeschlossen in D. Zu zeigen ist $A = D$.
Annahme: $A \neq D$. Dann gibt es ein $x \in A$ und ein $y \in D \setminus A$. Da D wegzusammenhängend ist, gibt es eine Kurve $\gamma : [0,1] \to D$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, γ stetig. Somit ist $K := \gamma^{-1}(A) \subset [0,1]$ zugleich offen und abgeschlossen und enthält die 0. Aus den Übungen wissen wir, dass dann schon $K = [0,1]$ folgt, im Widerspruch zu $\gamma(1) \notin A$.

(Sei $\lambda := \sup K$. Da K abgeschlossen ist, folgt $\lambda \in K$. Wäre $\lambda < 1$, dann gäbe es ein $\epsilon > 0$ mit $y + \epsilon \in K$, da K offen. Bleibt nur $y = 1$.)

89. Matrixexponential

Geben Sie das Matrixexponential e^{tA} von $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ an.

LÖSUNG:

Da A eine Blockmatrix ist, kann man die Blöcke getrennt betrachten,

$$e^{t\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = e^{2t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}(2t)} & (2t)e^{-\frac{1}{2}(2t)} \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}(2t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

oder

$$e^{t\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Für $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet man die Eigenwerte $\lambda_{12} = -2 \pm 3i$ und die zugehörigen Eigenvektoren $b_1 = \binom{1}{i}$ und $b_2 = \binom{1}{-i}$. Dann ist mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Be^{t\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} B^{-1} = \cdots \text{(Nachrechnen!)} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -\sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}$$

oder man erkennt, dass $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ kommutieren. Somit ist

$$e^{tA} = e^{\begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & 3t \\ -3t & 0 \end{pmatrix}} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -\sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t}\cos 3t & e^{-2t}\sin 3t \\ 0 & 0 & -e^{-2t}\sin 3t & e^{-2t}\cos 3t \end{pmatrix}$$

90. Totale Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für $(x,y) \neq 0$ und $f(0,0) = 0$. Man zeige: f ist total differenzierbar, die partiellen Ableitungen sind aber unstetig im Nullpunkt.

LÖSUNG:

Für $(x,y) \neq 0$ ist f stetig partiell differenzierbar als Zusammensetzung stetig differenzierbarer Funktionen. Im Nullpunkt ist die totale Ableitung die Nullfunktion, $Df(0,0) = 0$, denn es gilt für $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\frac{\|f(h_1,h_2) - Df(0,0)(h_1,h_2)\|}{\|h\|} = \left|\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} = \|h\| \to 0$$

für $h \to 0$. Für die partiellen Ableitungen betrachten wir nur

$$\partial_1 f(x,0) = \frac{\partial}{\partial x} x^2 \sin\frac{1}{|x|} = 2x\sin\frac{1}{|x|} - \operatorname{sgn}(x)\sin\frac{1}{|x|}$$

für $x \neq 0$. Diese Funktion ist offenbar bei Null nicht stetig fortsetzvbar, wie man an der Nullfolge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ sieht, für die $f(x_n)$ die Häufungspunkte ± 1 besitzt. Das Argument für die zweite partielle Ableitung ist ganz analog.

91. Rotation eines Vektorfeldes

Sei $a \in \mathbb{R}^3$, $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = a \times x$. Man berechne $J_v(x)$ und $\operatorname{rot} v$.

Lösung:

$$v(x) = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}}_{J_v(x)} x$$

Ween $J_v(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1(x) & \partial_2 v_1(x) & \partial_3 v_1(x) \\ \partial_1 v_2(x) & \partial_2 v_2(x) & \partial_3 v_2(x) \\ \partial_1 v_3(x) & \partial_2 v_3(x) & \partial_3 v_3(x) \end{pmatrix}$ ist

$$\operatorname{rot} v(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3(x) - \partial_3 v_2(x) \\ \partial_3 v_1(x) - \partial_1 v_3(x) \\ \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1 \\ a_2 + a_2 \\ a_3 + a_3 \end{pmatrix} = 2a.$$

92. Taylor-Formel

Gegeben sei eine Funktion $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, die im Ursprung einen kritischen Punkt besitzt. Weiter gilt

$$g(0) = 5, \quad \partial_1^2 g(0) = \partial_1 \partial_2 g(0) = 1, \quad \partial_2^2 g(0) = 0.$$

(a) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von g im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

$$\boxed{g(x,y) = 5 + \frac{1}{2}x^2 + xy \qquad\qquad + R_3(x,y)}$$

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ kann man $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_3(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^k} = 0$ folgern?

☒ $k = 0$ ☒ $k = 1$ ☒ $k = 2$ ☐ $k = 3$ ☐ $k = 4$ ☐ $k = 5$

(c) Sei nun $f(x,y) = (-y, x+y)$. Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von $h = g \circ f$ im Entwicklungspunkt 0 explizit?

$$\boxed{h(x,y) = 5 - \frac{1}{2}y^2 - yx \qquad\qquad + R_3'(x,y)}$$

LÖSUNG:

(a) $g(x,y) = g(0) + \operatorname{grad} g(0) \cdot \binom{x}{y} + \frac{1}{2}\binom{x}{y} \cdot H_g(0)\binom{x}{y} + R_3(x,y)$
$= g(0) + \frac{1}{2}\partial_1^2 g(0)x^2 + \partial_1\partial_2 g(0)xy + \frac{1}{2}\partial_2^2 g(0)y^2 + R_3(x,y).$

(b) Nach dem Satz von Taylor ist $R_3(x,y) = o(|(x,y)|^2)$. D.h., $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_3(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^k} = 0$ für $k = 2$ und damit auch für $k \leq 2$.

(c) Es ist $h(x,y) = g(f(x,y)) = g(-y, x+y) = 5 + \frac{1}{2}y^2 - y(x+y) + R_3(-y, x+y).$