TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Blatt 12
(07.07.2010)

Zentralübung

77. Leibnizregel für parameterabhängige Grenzen.

Seien $f, \partial_1 f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, $g, h : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar. Man beweise für $x \in [a,b]$:

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} \partial_1 f(x,y)dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x)g'(x).$$

78. Die Gammafunktion

Die Gammafuntion ist für $x > 0$ definiert als $\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$. Man zeige:

(a) $\Gamma(x)$ ist für $x > 0$ wohldefiniert, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\ln \Gamma(x)$ ist konvex. Hinweis: Benutzen Sie $\int g(x)dx \int g(x)f(x)^2dx \geq (\int g(x)f(x)dx)^2$.

79. Integrabilitätsbedingung

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : D \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Vektorfeld. Man zeige:

(a) Für $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ erfüllt das Vektorfeld $v(x) = g(\|x\|)x$ mit $g \in C^1(]0,\infty[$ die Integrabilitätsbedingung. Gibt es ein zugehöriges Potential?

(b) $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : z = 0, x^2+y^2 = 1\}$ ist nicht einfach wegzusammenhängend. Hinweis: Man gebe ein rotationsfreies Vektorfeld auf D an, das nicht konservativ ist.

Hausaufgaben

80. Besselfunktionen

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(x \sin t - nt)dt$$

die n-te Besselfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass J_n eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe für J_0 und ihren Konvergenzradius.

Bemerkung: J_0 ist gleich seiner Taylorreihe.

81. Schwingungsdauer des mathematischen Pendels

Die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels $\ddot{\varphi} = \sin\varphi$ ist gegeben durch

$$T(\varphi_0) = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \psi}},$$

wobei $\varphi_0 \in]0, \pi[$ die maximale Auslenkung des Pendels in Bogenmaß ist.

(a) Entwickeln Sie bis zur 2. (oder bis zur 4.) Ordnung in φ_0. Hinweis: Binomialreihe.

(b) Wieviele Sekunden pro Jahr Abweichung zeigt eine Pendeluhr bei maximaler Auslenkung von einem Grad, einer Bogenminute, bzw. einer Bogensekunde?

82. Gewicht und Schwerpunkt eines inhomogenen Kreisrings

Ein Kreisring, parametrisiert durch die Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ hat eine Linienmassendichte gegeben durch $\rho(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - x)}$. Berechnen Sie die Gesamtmasse M und die Schwerpunktkoordinaten $s = (s_x, s_y)$ des Rings.

$M =$	$s_x =$	$s_y =$

83. Magnetischer Wirbel

Gegeben ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha(-y, x)$.

(a) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt?

(b) Zeigen Sie explizit, dass $D := \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ sternförmig ist.

(c) Geben Sie für $\alpha = -1$ ein Potential $V : D \to \mathbb{R}$ von $v|_D$ an und zeigen Sie, dass V nicht stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fortgesetzt werden kann.

Abgabe der Hausaufgaben: 19.07.2010, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung