Zentralübung

70. Der Satz über implizite Funktionen, linearer Fall

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, $b \in \mathbb{R}^m$. Unter welcher Bedingung ist das Gleichungssystem $f(x, y) = b$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ nach y auflösbar? Man gebe explizit die implizit definierte Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an, für die $f(x, g(x)) = b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

71. Thermodynamische Beziehungen

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\bar{x}) = 0$ und $\partial_j f(\bar{x}) \neq 0$ für alle $j = 1, ..., n$. Interpretieren und beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = (-1)^n.$$

72. Extrema mit Nebenbedingungen I

(a) Man beschreibe die durch die Gleichung $e^{xy} = x + y$ gegebene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $F(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ unter der Nebenbedingung $e^{xy} = x + y$.

Hausaufgaben

73. Newton-Iteration, eindimensional

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und x^* eine Nullstelle von f mit $f'(x^*) \neq 0$. Man zeige, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass die Funktion $F : U_\epsilon(x^*) \to U_\epsilon(x^*)$,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

eine Kontraktion ist. Welches sind die Fixpunkte von F?

(b) Berechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder der Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$ für $f(x) = x^2 - 2$ mit geeignetem Startwert x_0 und interpretieren Sie sie geometrisch an Hand des Graphen von f und dessen Tangenten an die Punkte $(x_n, f(x_n))$.

74. Taylorentwicklung einer implizit definierten Funktion

(a) Man begründe: Ist $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Funktion, $k \in \mathbb{N}$, so dass $f(x, y) = 0$ in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ lokal nach y auflösbar ist, dann ist auch die dort lokal definierte Funktion $g : W \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x, g(x)) = 0$ für $x \in W$ k-mal stetig differenzierbar.

(b) Sei $p(x)$ ein reelles Polynom mit der einfachen Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass das Polynom $p(x) - \alpha$ für kleine α eine Nullstelle $\tilde{x}(\alpha)$ in der Nähe von x_0 besitzt und entwickle $\tilde{x}(\alpha)$ bis zur dritten Ordnung in α.
HINWEIS: Man betrachte die Gleichung $f(\alpha, x) = 0$ für $f(\alpha, x) = p(x) - \alpha$.

75. Lokale Auflösbarkeit

(a) Sei $f(x,y,z) = \sqrt{2}\sin(xy) - e^z$. Man löse jeweils nach x, y, z auf und berechne den Gradienten der erhaltenen Funktionen an der Stelle $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

(b) Sei $f(x,y,z) = \sqrt{2}\cos(z)\sin(xy) - (x + \frac{y}{\pi})e^z$. Man berechne den Gradienten der durch Auflösen nach x, y, bzw. z erhaltenen Funktionen an der Stelle $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$.

76. Extrema mit Nebenbedingungen II

(a) Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(1,0,0)$ von der durch die Gleichung $x + y - z = 0$ gegebenen Ebene.

(b) Wie lauten die Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ auf der Einheitskreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$?

Abgabe der Hausaufgaben: 12.07.2010, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung