Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Blatt 10
(23.06.2010)

Zentralübung

63. Die multinomische Formel

Man zeige für $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}^k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = k} \frac{k!}{\nu!} x^\nu.$$

64. Taylor-Entwicklung

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung.

(a) $f(x,y) = \frac{1+x^2-2y^2}{\sqrt{4+xy}}$ im Entwicklungspunkt $(0,0)$,

(b) $f(x,y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}$ im Entwicklungspunkt $(1,\pi)$.

65. Lineare Ausgleichsrechnung

(a) Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times 2}$, mit $M^T M$ invertierbar, $y \in \mathbb{R}^n$. Finden Sie das Minimum der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(\alpha) = |y - M\alpha|^2$.

(b) Seien $(v_i, a_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 100$, Messwerte der Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Autos jeweils zu den Zeiten t_i, $t_i < t_{i+1}$. Das Auto wurde auf ebener Strecke zur Zeit $t_0 < t_1$ ausgekuppelt und rollte aus. Gesucht sind die Koeffizienten der Funktion $a(v) = \mu + \beta v^2$, aus denen sich Rollreibung und Luftwiderstandsbeiwert des Autos bestimmen lassen, so dass die quadratische Abweichung $\sum_i |a_i - a(v_i)|^2$ minimal ist.

Geben Sie explizite Formeln für μ, β an.

Hausaufgaben

66. Taylorformel konkret

(a) 49 nummerierte Bälle werden aus einer großen Kiste in zufälliger Reihenfolge gezogen und dabei auf zwei Kisten verteilt, so dass die ersten 43 Bälle in die erste, und der Rest in die zweite Kiste kommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Nummern der Bälle in der ersten Kiste korrekt vorhersagen?

(b) Sie wollen alle 12-ten partiellen Ableitungen von $f \in C^{12}(\mathbb{R}^2)$ berechnen. Wieviele gibt es insgesamt? Wieviele müssen Sie wegen des Satzes von Schwarz tatsächlich nur berechnen? Wieviele partielle Ableitungen sind gleich $\partial_1^3 \partial_2^9 f$?

(c) Sie wollen alle fünften partiellen Ableitungen von $f \in C^{12}(\mathbb{R}^3)$ berechnen. Wieviele gibt es insgesamt? Wieviele müssen Sie wegen des Satzes von Schwarz tatsächlich nur berechnen? Wieviele partielle Ableitungen sind gleich $\partial_1^2 \partial_2^3 f$?

(d) (*) Finden Sie eine Formel für die Anzahl der verschiedenen k-ten Ableitungen für eine Funktion mit n Variablen!

67. Taylorentwicklung entlang einer Geraden

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = th$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f \circ \gamma(t)$.

(a) Man zeige für $k \in \mathbb{N}_0$

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i \in \{1,\cdots,n\}^k} (\partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f)(th) h_{i_1} \cdots h_{i_k} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, |\nu| = k} \frac{k!}{\nu!} \partial^\nu f(th) h^\nu.$$

HINWEIS: Sie können sich auf Aufgabe 63 beziehen.

(b) die Taylorreihe von g konvergiere in einer Umgebung der 0 gegen g. Bestätigen Sie für kleine t

$$f(th) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\nu f(0)}{\nu!} (th)^\nu.$$

68. Quadratisches Ergänzen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Bestimmen Sie den stationären Punkt x_0 von $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \tfrac{1}{2} x^T A x + b^T x,$$

und geben Sie Bedingungen dafür an, dass x_0 ein lokales Minimum ist.
HINWEIS: Vergleichen Sie die Taylorformel bis zur zweiten Ordnung im Entwicklungspunkt x mit $F(x+h)$.

(b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ die Eigenwerte von A und $(b_1, \ldots, b_n)$ eine zugehörige Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Geben Sie explizit eine bijektive Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ihre Umkehrfunktion an, so dass für $\tilde{F} = F \circ \Phi$ einfach $\tilde{F}(y) = F(x_0) + \|y\|^2$ gilt. Begründen sie warum x_0 absolutes Minimum von F ist.

69. Extremwertbestimmung

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$

(a) (i) eine Funktion, deren Graph Tangentialebene an den Graph G_f bei $(0, 1)$ ist,
(ii) eine quadratische Funktion, die mit f bis zu den zweiten Ableitungen im Punkt (x_0, y_0) übereinstimmt,

(b) lokale und globale Extremstellen und Sattelpunkte,

(c) Maximum und Minimum für $(x, y) \in [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \times [-2, 2]$.

Abgabe der Hausaufgaben: 05.07.2010, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung