Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik (Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Blatt 8
(09.06.2010)

Zentralübung

49. Eine reguläre Kurve hat keinen Knick

Sei $G = \{(s, |s|) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Man beweise oder widerlege

(a) Es gibt eine stetig differenzierbare Kurve, deren Spur G ist.

(b) Es gibt eine reguläre Kurve, deren Spur G ist.

(c) G kann auf Bogenlänge parametrisiert werden.

50. Krümmung der Klothoide

Die Krümmung $\kappa(t)$ einer zweimal stetig differenzierbaren regulären Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot\gamma(t) \times \ddot\gamma(t)\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3}.$$

Man zeige:

(a) Die Krümmung ist invariant unter zweimal stetig differenzierbaren Parametertransformationen.

(b) Eine Kurve, die einen Kreis mit Radius $r > 0$ durchläuft, hat die Krümmung $\frac{1}{r}$.

(c) Für die Klothoide

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \cos(s^2/2)ds, \int_0^t \sin(s^2/2)ds, 0 \right)$$

gilt $\kappa(t) = t$.

51. Rektifizierbare Wege

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so heißt

$$L(f) := \sup_{[a,b]\subset I} L(f|_{[a,b]}) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$$

die Bogenlänge von f. Ist $L(f) < \infty$, so ist f rektifizierbar.

(a) Ist f stetig differenzierbar, so ist die Länge von f durch das uneigentliche Integral

$$L(f) = \int_I \|\dot f(t)\| dt$$

gegeben.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{zt}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f rektifizierbar? Man berechne $L(f)$.

Hausaufgaben

52. Zurückgelegte Wege

(a) Herrchen und Hund sind 100m von einem Baum entfernt. Herrchen geht mit 5km/h zu dem Baum. Gleichzeitig läuft sein Hund mit 15km/h zum Baum, dreht dort sofort um und läuft zurück zum Herrchen, dreht wieder zum Baum um, usw. Welche Strecke legt der Hund zurück?

(b) Zwei parallele Platten unendlicher Masse befinden sich im Abstand 2m. Die eine Platte bewegt sich mit 5cm/s auf die zweite, ruhende zu. Ein (punktförmiger) Ball schwebt zu Beginn in der Mitte zwischen den Platten. Welchen Gesamtweg legt der Ball bis zur Kollision der Platten zurück, wenn er von den Platten bei jedem Stoß elastisch reflektiert wird? Rechnen Sie nichtrelativistisch.

(c) Ist im relativistischen Fall die Wegstrecke, die der Ball bezüglich des Bezugssystems der ruhenden Platte zurücklegt, endlich oder unendlich?

53. Rektifizierbar oder nicht?

Sei $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ und $G_f \subset \mathbb{R}^2$ der Graph von f. Man zeige: G_f ist genau dann rektifizierbar, wenn $\alpha > 1$ ist.
Hinweis: Zeigen und benutzen Sie $b - a \leq \sqrt{1 + (a-b)^2} \leq 1 + |a| + |b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

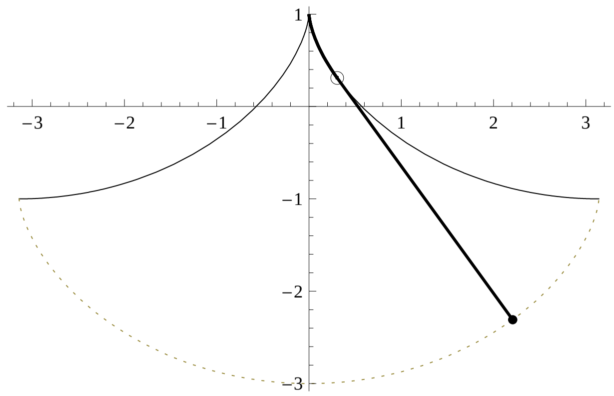
54. Zykloide

Eine Zykloide entsteht durch Überlagerung einer geradlinigen und einer kreisförmigen Bewegung mit gleichem Geschwindigkeitsbetrag. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, \cos t)$ ist z.B. eine solche Zykloide.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge von $\gamma_1 := \gamma|_{[0,2\pi]}$. Hinweis: $\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = |\sin \frac{t}{2}|$.

(b) Parametrisieren Sie γ_1 auf Bogenlänge.

(c) Zeigen Sie, dass sich das in $(0,1)$ aufgehängte Zykloidenpendel mit Fadenlänge 4, dessen Faden sich an die Zykloide γ anschmiegt, siehe Abbildung, wieder entlang einer (verschobenen) Zykloide bewegt. Hinweis: $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$.



55. Kettenlinie

Eine in den Punkten $(\pm 1, 0) \in \mathbb{R}^2$ eingespannte Kette nimmt im homogenen Schwerefeld die Form einer Kettenlinie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh a)$ mit $a > 0$ an.

(a) Man berechne die Bogenlänge der Kettenlinie und den Durchhang in Abhängigkeit von a.

(b) Wie stark hängt eine Kette ungefähr durch, wenn sie nur einen Meter länger ist, als die 2km breite Schlucht, die sie überspannt?

Abgabe der Hausaufgaben: 21.06.2010, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung