TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. D. CASTRIGIANO
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik 3 für Physik (Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Blatt 7
(02.06.2010)

Zentralübung

42. Lineares Differentialgleichungssystem I

Lösen Sie das System $\dot{x} = Ax$ für folgendes A und $x(0)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

43. Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld

Die Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ eines Teilchens der Ladung e und der Masse m gehorcht im konstanten magnetischen Feld B der Bewegungsgleichung

$$\dot{v} = v \times b$$

mit $b = \frac{e}{m} B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. $\omega = |b|$ ist die Zykloton(kreis)frequenz.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Abbildung $v \mapsto v \times b$.

(b) Zu $v \in \mathbb{R}^3$ sei $v_\| = \frac{v\cdot b}{|b|^2} b$, $v_\perp = v - v_\|$. Man zeige für $t \in \mathbb{R}$, dass

$$e^{tA} v = v_\| + \cos(\omega t) v_\perp + \sin(\omega t)\omega^{-1}(v \times b).$$

Interpretieren Sie e^{tA} geometrisch. HINWEIS: Man wähle die rechtshändige Orthonormalbasis (c_1, c_2, c_3) des $\mathbb{R}^3$, so dass $b = \omega c_3$ und $v = v_1 c_1 + v_3 c_3$, $v_1, v_3 \in \mathbb{R}$.

44. Inhomogene Matrixdifferentialgleichung

Zeigen Sie, dass die matrixwertige Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} R_t = A R_t + F_t, \quad R_0 = E$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig, die Lösung

$$R_t = e^{tA} + \int_0^t e^{(t-s)A} F_s ds$$

besitzt.

Hausaufgaben

45. Inhomogene Differentialgleichung höherer Ordnung

Gegeben ist die Differentialgleichung $y^{(4)} + 4y = e^t$.

(a) Man bestimme den Lösungsraum der homogenen Gleichung.

(b) Geben Sie alle Lösungen obiger Differentialgleichung an.
HINWEIS: "Erraten" Sie eine Lösung

46. Exponential einer Jordanmatrix

Gegeben ist (0-Einträge werden nicht geschrieben)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & \\ & & & & 3 & 1 & & & \\ & & & & & 3 & & & \\ & & & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom von A und in Tabellenform alle Eigenwerte mit zugehöriger algebraischer und geometrischer Vielfachheit und ihre Eigen- und Hauptvektoren (mit Stufe) an.

(b) Geben Sie das Matrixexponential e^{tA} an.

47. Lineares Differentialgleichungssystem II

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme eine Jordan-Normalform J von A und die zugehörige Basis aus Eigen- und Hauptvektoren.

(b) Man berechne e^{tJ} und gebe eine Lösungsbasis an.

(c) Man löse die AWA $\dot{x} = Ax$ mit $x(0) = (1, 1, 1, 1, 1)$.

48. Geladenes Teilchen im konstanten elektromagnetischen Feld

Ein Teilchen der Ladung e und der Masse m gehorcht im konstanten magnetischen Feld B und konstanten elektrischen Feld E den Bewegungsgleichungen

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = v \times b + f, \quad x(0), v(0) \in \mathbb{R}^3$$

mit $b = \frac{e}{m}B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $f = \frac{e}{m}E \in \mathbb{R}^3$. $\omega = |b|$ ist die Zykloton(kreis)frequenz. Sei $b = (0, 0, \omega)$, $v(0) = (v_0, 0, 0)$, $v_0 > 0$ und $x(0) = 0$. Bestimmen Sie $v(t)$, $x(t)$ für

(a) $f = 0$, (b) $f = (0, 0, 1)$, (c) $f = (0, 1, 0)$,

und beschreiben Sie die möglichen Bahnkurven.

Abgabe der Hausaufgaben: 13.06.2010, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung