TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. D. CASTRIGIANO
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik 3 für Physik (Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Blatt 4
(12.05.2010)

Zentralübung

23. Charakterisierung von Cauchy-Folgen

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) (a_n) in M ist Cauchy-Folge,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}\{a_k : k \geq n\} = 0$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} d(a_n, a_k) = 0$.

24. Der Graph einer stetigen Funktion ist abgeschlossen

(a) Seien (M,d), (N,d') metrische Räume, Ist $f : M \to N$ stetig, so ist der Graph von f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset M \times N$, abgeschlossen bezüglich der Produktmetrik auf $M \times N$.

(b) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

25. $\ell^2(\mathbb{N})$ ist vollständig

Für $a \in B(\mathbb{N})$ sei $\|a\|_2 := \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$ und $\ell^2(\mathbb{N}) = \{a \in B(\mathbb{N}) : \|a\|_2 < \infty\}$. Man zeige:

(a) $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ ist ein normierter Raum.

(b) $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ ist ein Banachraum.

26. Konstruktive Vervollständigung eines metrischen Raums

Sei (M,d) ein metrischer Raum, CM die Menge der Cauchy-Folgen in M.

(a) $(a_n) \sim (b_n) :\Longleftrightarrow d(a_n, b_n) \to 0$ für $n \to \infty$ ist eine Äquivalenzrelation auf CM mit Äquivalenzklassen $[(a_n)]$, $(a_n) \in CM$.

(b) Die Abbildung $i : M \ni a \mapsto [(a)_{n\in\mathbb{N}}] \in CM/_\sim =: \hat{M}$ ist injektiv. Ist M vollständig, so ist sie sogar bijektiv.

(c) $d_c((a_n),(b_n)) := \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$ ist auf $CM \times CM$ wohldefiniert.

(d) Der Quotient $\hat{M} := CM/_\sim$ ist mit $\hat{d}([(a_n)],[(b_n)]) := d_c((a_n),(b_n))$ eine Vervollständigung von (M,d).

Hausaufgaben

19. Mengen die offen und zugleich abgeschlossen sind

(a) In $[0,1]$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik ist jede offene und zugleich abgeschlossene nichtleere Teilmenge gleich $[0,1]$.

(b) Sei $M = U_1(-2,0) \cup U_1(2,0) \subset \mathbb{R}^2$. Geben Sie vier Teilmengen von M an, die bezüglich der induzierten euklidischen Metrik auf M offen und zugleich abgeschlossen sind.

(c) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : [0,1] \to M$ gibt mit $f(0) = (-2,0)$ und $f(1) = (2,0)$.

20. $(R[0,2\pi], \|\cdot\|_2)$ ist kein Banachraum

Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) in $\mathbb{C}^{[0,2\pi]}$ mit $f_n(x) = \min\{n, x^{-\frac{1}{3}}\}$.

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $(R[0,2\pi], \|\cdot\|_2)$.

(b) Es gibt kein $f \in R[0,2\pi]$ mit $\|f_n - f\|_2 \to 0$, somit ist $(R[0,2\pi], \|\cdot\|_2)$ nicht vollständig.

21. Äquipotenzialflächen als Graphen stetiger Funktionen

$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : E(x,y,z) = E_0\}$ ist die Äquipotenzialfläche einer stetigen Energiefunktion $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $E_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) N ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$.

(b) Sei $Q = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ ein beliebiger Quader. Ist $N \cap Q$ der Graph einer Funktion $f : [a,b] \times [b,c] \to [e,f]$, so ist f stetig.

22. Vervollständigungen eines metrischen Raums

Seien (M,d), $(\hat{M},\hat{d})$ metrische Räume. $i : M \to \hat{M}$ heißt **Isometrie**, wenn $\hat{d}(i(x),i(y)) = d(x,y)$ für alle $x,y \in M$. Ist i eine Bijektion, so heißen M und $\hat{M}$ **isometrisch isomorph**. Ist $\hat{M}$ vollständig und $i(M)$ dicht in $\hat{M}$, so heißt $\hat{M}$ eine **Vervollständigung** von M.

(a) Isometrien sind injektiv und stetig.

(b) Sind $\hat{M}_1$ und $\hat{M}_2$ Vervollständigungen von M, so sind sie isometrisch isomorph.

(c) $(\mathbb{R},d)$ ist mit $d(x,y) = |\tanh x - \tanh y|$ ein nicht vollständiger metrischer Raum.

(d) $([-1,1], |\cdot|)$ ist eine Vervollständigung von $(\mathbb{R},d)$.

(e) Wie ist d auf $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fortzusetzen, damit $(\overline{\mathbb{R}},d)$ isometrisch isomorph zu $([-1,1], |\cdot|)$ ist?

Abgabe der Hausaufgaben: (wegen Pfingsten) Mittwoch, 26.05.2010, in den Tutorübungen oder bis 11:30 im Briefkasten