TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Blatt 3
(05.05.2010)

Zentralübung

15. Einheitskugel in der p-Norm

Skizzieren Sie $U_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der von $\|\cdot\|_p$ erzeugten Metrik für $p = 1, 2, 4, \infty$. Wie lautet die analoge Menge für $p = \frac{1}{2}$? Warum definiert $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ keine Norm?

16. Produktmetrik

Seien (X, d^X), (Y, d^Y) metrische Räume, $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$,

$$d((x,y),(x',y')) := \max\{d^X(x,x'), d^Y(y,y')\}.$$

Zeigen Sie, dass $(X \times Y, d)$ ein metrischer Raum ist.

17. Abgeschlossene Kugeln und Sphären

Sei (X, d) metrischer Raum, $a \in X$, $r > 0$.

(a) Die "abgeschlossene Kugel" $\tilde{U}_r(a)$ ist abgeschlossen.

(b) Die Sphäre $S = \{x \in X : d(x,a) = r\}$ ist abgeschlossen.

(c) Ist X ein normierter Vektorraum mit induzierter Metrik, so gilt $S = \partial U_r(a) = \partial \tilde{U}_r(a)$.

(d) Geben Sie Beispiele für metrische Räume, für die $\partial U_r(a) \subsetneq S$, bzw., $\partial \tilde{U}_r(a) \subsetneq S$. Hinweis: Betrachten Sie z.B. Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

18. Definition der Cantormenge

Sei $C_0 := [0,1]$, $C_{n+1} = (\frac{1}{3}C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$, $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$. Man zeige:

(a) $C_{n+1} \subset C_n$,

(b) C ist abgeschlossen, nichtleer und selbstähnlich, $C = (\frac{1}{3}C) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C)$.

(c) C_n besteht aus 2^n disjunkten Intervallen, jeweils der Länge 3^{-n},
$C_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{a_{n+1}}{3^n} : a \in \{0,1\}^n \times [0,1] \right\}$

(d) $C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k} : a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \right\}$ und besitzt überabzählbar viele Elemente.

Hausaufgaben

19. Vereinigung und Schnitt abgeschlossener Mengen

Sei (X, d) metrischer Raum.

(a) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(b) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(c) Es gibt abzählbar viele offene Intervalle in $\mathbb{R}$, deren Durchschnitt nicht offen ist.

(d) Es gibt eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nicht abgeschlossen ist.

(e) Es gibt abzählbar viele abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

20. Ränder

Man bestimme, mit Begründung, Inneres, Rand und Abschluss für

(a) $]a, b] \subset \mathbb{R}$, (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, (c) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. (d) $]0, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$,

mit der jeweiligen Standardmetrik auf der Obermenge.

21. Eindeutigkeit des Grenzwerts, Berührpunkte

Sei (X, d) metrischer Raum.

(a) Für (x_n) in X, $a, b \in X$ gilt: aus $x_n \to a$ und $x_n \to b$ folgt $a = b$.

(b) Sei $Y \subset X$. $a \in X$ ist genau dann ein Berührpunkt von Y, wenn es eine Folge (x_n) in Y gibt, mit $x_n \to a$.

22. Randpunkte der Cantormenge

Sei $C_0 := [0, 1]$, $C_{n+1} = (\frac{1}{3}C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$, $C := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$, $R := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \partial C_n$. Man zeige:

(a) $\partial C_n \subset \partial C_{n+1}$, Hinweis: $\partial C_{n+1} = (\frac{1}{3}\partial C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\partial C_n)$.

(b) Es ist $\partial C_n = R_n := \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{a_{n+1}}{3^n} : a \in \{0, 1\}^{n+1} \right\}$.

(c) $R \subset C$ enthält unendlich viele Punkte.

(d) R ist nicht abgeschlossen, $\overline{R} = C$.

Abgabe der Hausaufgaben: 17.05.2010, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung