Zentralübung

8. Der Dirichlet-Kern ist eine divergente Cosinusreihe

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ diverent.

9. Geometrische Cosinus- und Sinuskoeffizienten

(a) Berechnen Sie $f_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kt$ und $g_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kt$ für $r \in]-1,1[$.
Hinweis: Man betrachte $f_r(t) + ig_r(t)$.

(b) Bestimmen Sie $f(t)$ und $g(t)$ als punktweisen Limes von f_r, g_r für $r \to 1-$.

(c) Bestimmen Sie Stammfunktionen F von $f-1$ und G von g auf $]0,2\pi[$.
Hinweis: Substitution $x = \sin \frac{t}{2}$.

(d) Man skizziere die auftretenden Funktionen mit Hilfe eines Plot-Programms.

Bemerkung: Man kann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k} = -\ln(2 \sin \frac{t}{2})$ für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ zeigen.

10. Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin 2^{k^2} x}{2^k}$ ist gleichmäßig konvergent. f ist stetig, aber nirgends differenzierbar.

Hausaufgaben

11. Fourier-Koeffizienten

Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x) = x \cos x$, $x \in]-\pi,\pi[$.

12. Anwendung des Riemann-Lebesgue-Lemmas

Seien $f \in R[0,2\pi]$ und $(a_k), (b_k)$ die zugehörigen Cosinus- und Sinus-Koeffizienten. Zeigen Sie mit Hilfe des Riemann-Lebesgue-Lemmas, dass (a_k) und (b_k) Nullfolgen sind.

13. Rechenregeln für Fourierreihen

Man zeige die Rechenregeln für Fourierreihen aus der Vorlesung. Sind f, g 2π-periodische Regelfunktionen, so gilt

(a) $(\widehat{f + \alpha g})_k = \hat{f}_k + \alpha \hat{g}_k$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

(b) $g(t) = \overline{f(t)} \Rightarrow \hat{g}_k = \overline{\hat{f}_{-k}}$,

(c) $g(t) = f(-t) \Rightarrow \hat{g}_k = \hat{f}_{-k}$,

(d) $g(t) = e^{int} f(t) \Rightarrow \hat{g}_k = f_{k-n}$,

(e) $g(t) = f(t+a)$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{g}_k = e^{ika} \hat{f}_k$.

14. Rechteckfunktion

(a) Bestimmen Sie die Cosinus-Sinus-Darstellung von $f(t) = \operatorname{signum}(\sin t)$ mit Hilfe der Stammfunktion von f, die als $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$ geschrieben werden kann.

(b) Man skizziere $-\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{(2k+1)^3}$ und berechne $1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} \pm \cdots$.

Abgabe der Hausaufgaben: 10.05.2010, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung