TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. M. Prähofer

Mathematik 3 für Physik (Analysis 2)

http://www-hm.ma.tum.de/ss10/ph2/

Sommersemester 2010
Blatt 1
(21.04.2010)

Zentralübung

1. Gleichmäßige, normale Konvergenz der Ableitungen einer Funktionenreihe

(a) Zeigen Sie: Ist (f_n) in $C^1([a,b])$ eine Funktionenfolge, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ existiert und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ gleichmäßig konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig und

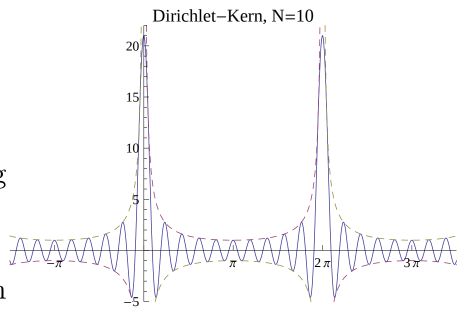
$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n.$$

(b) Gilt der Satz auch, wenn man in (a) "gleichmäßig" durch "normal" ersetzt?

2. Dirichlet-Kern

Der N-te Dirichlet-Kern $D_N(t)$ ist definiert durch

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}.$$



(a) Man zeige, dass $D_N(t)$ die stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ von $\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}$, $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, ist.

(b) Geben Sie die Cosinus-Sinus-Darstellung von $D_N(t)$ an.

3. Césaro-Summe

Sei (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge (c_n) der Césaro-Summen von (a_n), $c_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, gegen den gleichen Wert konvergiert, wie (a_n).

(b) Wie verändert sich der Beweis, wenn (a_n) eine Funktionenfolge in dem Banachraum $(B(X), \|\cdot\|_s)$ ist?

(c) Geben Sie eine divergente reelle Folge an, deren Césaro-Summe konvergent ist.

(d) Geben Sie eine alternierende reelle Folge an, deren Césaro-Summe divergiert.

(e*) Gibt es eine unbeschränkte Folge, deren Césaro-Summe konvergiert?

Hausaufgaben

4. Taylorentwicklung einer Stammfunktion der Gaußkurve

Blatt 4, Aufgabe 1 Math. II, FU Darmstadt 1936:

$$\int e^{-x^2} dx$$

läßt sich nicht in geschlossener Form auswerten.

(a) Man gebe eine Reihenentwicklung dafür an.

(b) Man berechne mit dieser Reihe

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

auf drei Stellen genau.

(c) Das bestimmte Integral ist durch eine Skizze zu veranschaulichen.

Hinweis: siehe Überschrift

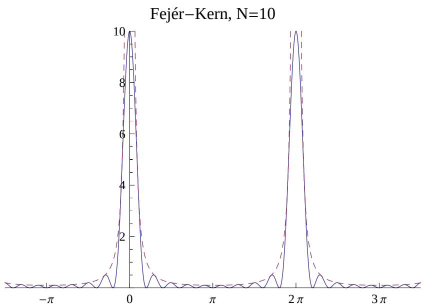
5. Fejér-Kern

Der N-te Fejér-Kern $F_N(t)$ ist als arithmetisches Mittel von Dirichlet-Kernen definiert durch

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t).$$

(a) Man zeige, dass $F_N(t)$ die stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ von $\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{N}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$, $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, ist.
Hinweis: Man wandle den Ausdruck $N\sin^2(\frac{t}{2})F_N(t)$ in eine Teleskopsumme um.

(b) Geben Sie die Cosinus-Sinus-Darstellung von $F_N(t)$ an.



6. Fourierreihen modifizierter Funktionen

(a) Welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt die Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{|k|!}$, $k \in \mathbb{Z}$?

(b) Wie lauten die Fourierkoeffizienten von $g(x) = e^{\sin x}\cos(\cos x)$?

(c) Wie lauten die Fourierkoeffizienten von $h(x) = e^{\cos 2x}\cos(\sin 2x)$?

(d*) Wie lauten die Fourierkoeffizienten von $p(x) = -1 + 2e^{2\cos x}\cos(2\sin x)$?

7. Sägezahn- und Dreicksfunktion

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $f(x) = \max\{0, x\}$ für $x \in]-\pi, \pi]$. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten und das asymptotische Verhalten ihrer Beträge für große k, von

(a) f, (b) g, mit $g(x) = f(-x)$, (c) $h = f + g$.

Skizzieren Sie jeweils den Graphen und geben Sie die ersten Summanden der Cosinus-Sinus-Darstellung an. Konvergiert die Fourierreihe jeweils gegen die entsprechende Funktion?

Abgabe der Hausaufgaben: 03.05.2010, bis 11:30 im Briefkasten oder zu Beginn der Zentralübung