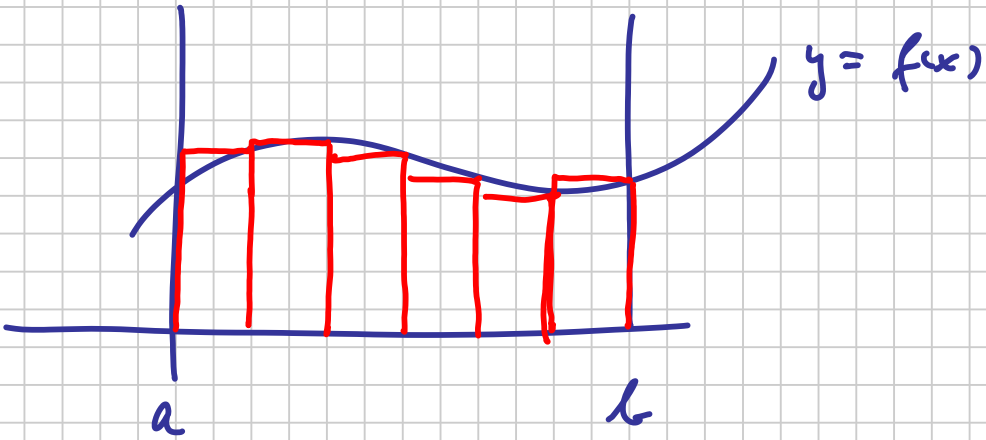
Kapitel 5: Numerische Integration

Notiztitel 07.07.2008

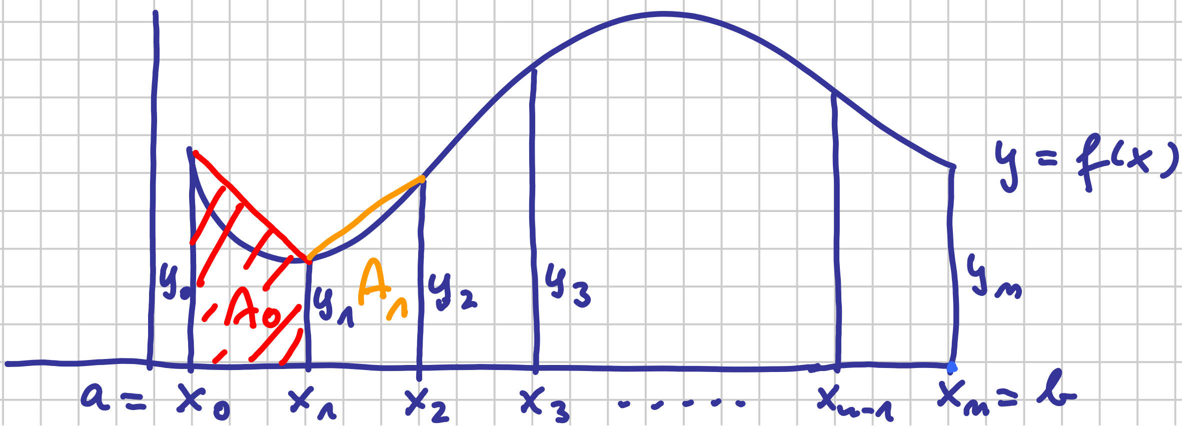
Motivation: Es gibt Stammfkt., die sich nicht durch elementare Fkt. darstellen lassen

z.B Stammfkt. von e^{-x^2}



1. Berechnungsmöglichkeit: Streifen aufsummieren

2. Trapezregel



$$A_0 = (x_1 - x_0)\cdot(y_0 + y_1)/2 = \frac{1}{2}\underbrace{(x_1 - x_0)}_{h = \frac{b-a}{n}}(y_0 + y_1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \overset{\frac{h}{2}}{\frac{b-a}{2n}}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$

Bsp. Von einer Funktion f ist bekannt

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 0$

$f(4) = 4$, $f(5) = 3$, $f(6) = 10$

gesucht: Näherung von $\int_1^6 f(x)\,dx$, $n = 5$

$$\int_1^6 f(x)\,dx \approx \frac{5}{2\cdot 5}\big[1 + 4 + 0 + 8 + 6 + 10\big]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 29 = \underline{\underline{14.5}}$$

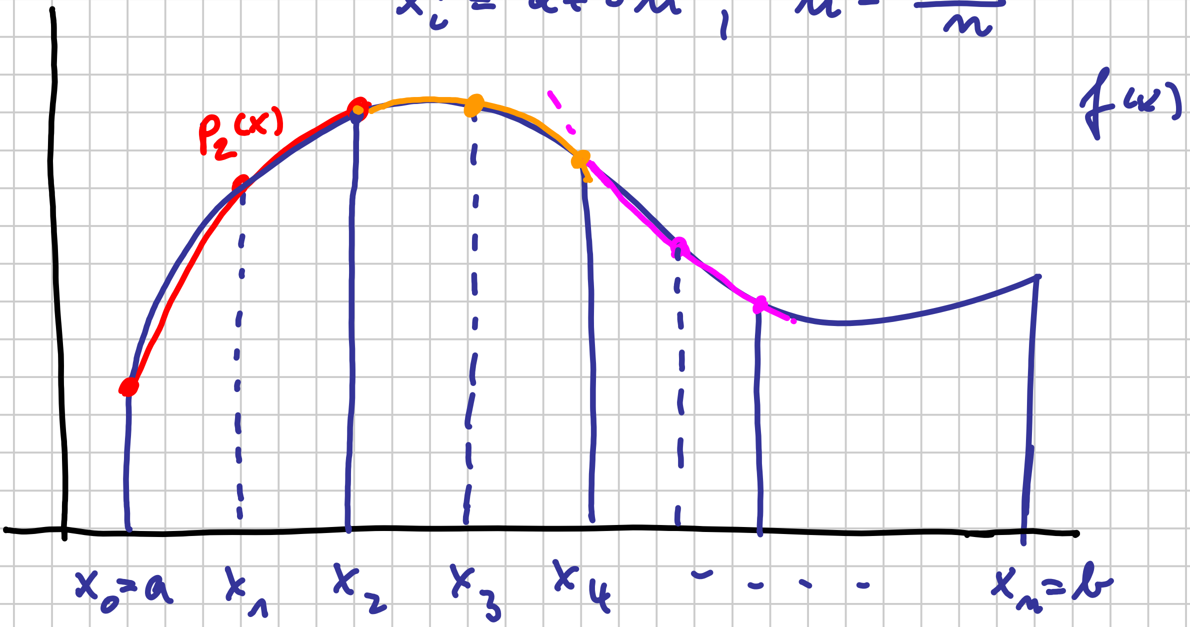
Über die Güte der Näherung lässt sich natürlich keine Aussage treffen.

Simpson - Regel:

Sei $f \in C^4[a,b]$

Das Intervall $[a,b]$ wird in eine gerade Anzahl v. Teilintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1,2,\dots,n$ (gerade)

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}$$



$$\int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Satz: $f \in C^{n+1}[a,b]$, P_n Interpolationspolynom

$x_0, \dots, x_n$ Stützstellen

Dann existiert ein $\xi \in [\overset{x_0}{a}, \overset{x_n}{b}]$ mit

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\text{Fehler}}$$

$$\leq \frac{m}{(n+1)!} \left| (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \right|$$

$$m = \max |f^{(n+1)}(x)| \quad x \in [a,b]$$

Anwendung auf Trapez-Regel

$$\max |f''(x)|_{x \in [a, a+h]}$$

$$\Big| \int_a^{a+h} f(x)\,dx - \underbrace{\frac{h}{2}\big[f(a) + f(a+h)\big]}_{\int_a^{a+h} P_1(x)\,dx} \Big| \leq \frac{m}{2} \Big| \int_a^{a+h} (x-a)(x-(a+h))\,dx \Big|$$

$$= \frac{m}{2} \frac{h^3}{6} = \frac{1}{12} m h^3$$

Gesamtfehlerabschätzung

$$R_T \le \frac{1}{12} h^3 \, n \cdot M \qquad M := \max\{m_i\}$$

$$= \frac{1}{12} \frac{b-a}{h} M h^3 \qquad h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{b-a}{h}$$

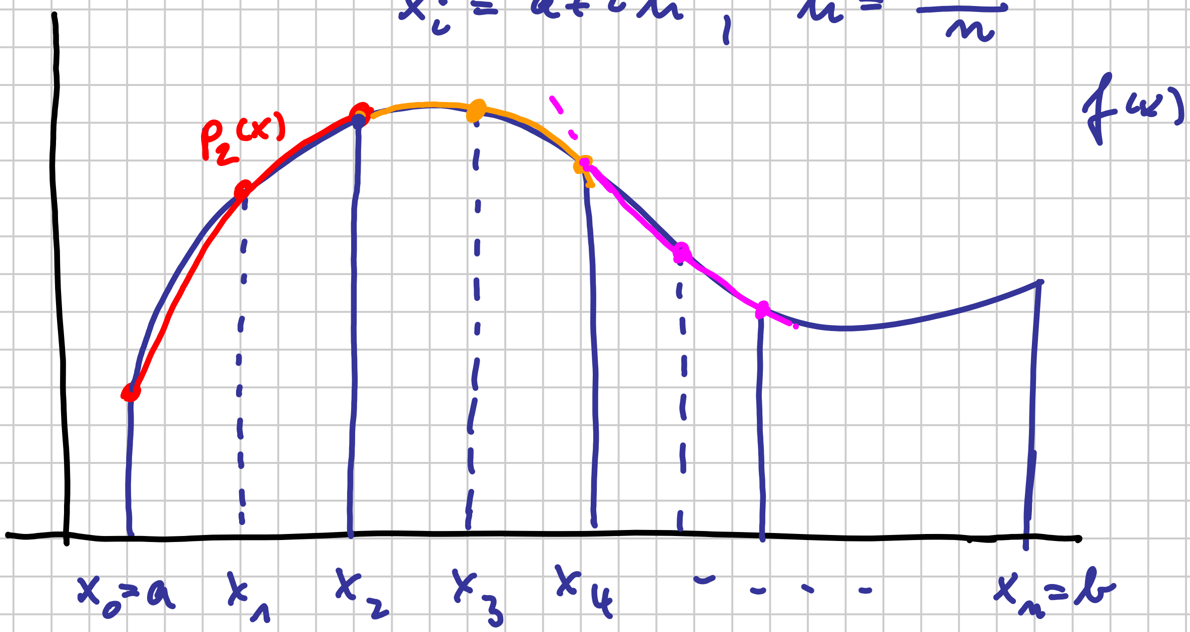
$$= \frac{b-a}{12} M h^2$$

Simpson-Regel

Sei $f \in C^4[a,b]$

Das Intervall $[a,b]$ wird in eine <u>gerade</u> Anzahl v. Teilintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ $\quad i = 1,2,\dots,n$ (gerade)

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}$$



$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$

mit Fehler $R_S \leq \frac{(b-a)}{180} M h^4$, $\quad M = \max \left| f^{(4)}(x) \right| \quad x \in [a,b]$